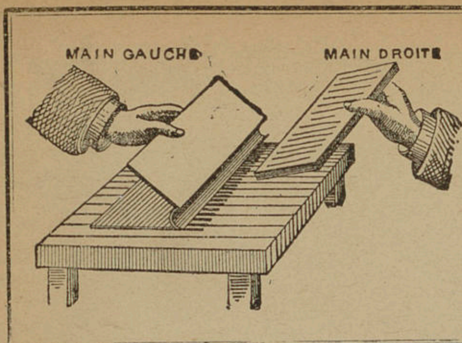

colorchecker CLASSIC
x·rite
mm



RELIURE ÉLECTRIQUE OU INSTANTANÉE

I. F.

Exiger la Marque de Fabrique PARIS-LONDON

Patent

MODE D'EMPLOI

De la main gauche, soulever un des côtés en appuyant l'intérieur de l'autre sur le bureau ; le dos se trouvant ainsi ouvert, la main droite sert à introduire ou retirer les papiers.

Laisser la reliure revenir sur elle-même et les papiers se trouvent fixés.

N.-B. - La chemise, renfermée dans chaque reliure, n'est pas indispensable, mais elle facilite l'introduction des papiers.

RELIURE ÉLECTRIQUE

Servant à relier soi-même sans difficulté, les papiers, manuscrits, documents, etc.

FORMAT	HAUT.	LARG.
N° 0	22 ×	14
» 1 In-8°	24 ×	16 1/2
» 2 In-4°	29 ×	21
» 3 Musique	36 ×	26
» 4 Ministre	32 ×	22
» 5 In-8° Jésus	28 ×	18
» 6 Journal illustré, etc.	40 ×	28
» 7 Quadrille	28 ×	36
» 8 Traite Mandat	13 ×	29
» 9 Journaux illustrés grand format	46 ×	33

I. F.

PARIS-LONDON

PATENT

Spécialité d'articles anglais pour bureaux

N° **1**

Toute reliure non revêtue de la signature ci-dessous n'est pas la véritable reliure électrique.

A

Mathematica
1892-1893.

B

H. Grassmann: Ausdehnungslehre. 1844.
id. 2e Ausdehnungslehre (différente) 1862
(toutes deux dans les Œuvres complètes, publiées à Leipzig, Teubner 1894-96)

Whitehead, A Treatise on Universal Algebra t. I. Cambridge, 1898.

Burali-Forti: Introduction à la Géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann. Paris, 1897.

Fehr (~~un ouvrage sur la méthode de Grassmann~~ Application de la méthode vectorielle de Grassmann à la géométrie infinitésimale; 94 pages. Naud, 1899.)

Bellavitis: ~~Théorie~~ Méthode des équipollences, 1854, trad. Laisant (Gauthier Villars, 1874)

Laisant: Introduction à la méthode des quaternions. (Gauthier Villars, 1881)

Duporcq: Premiers principes de Géométrie moderne (Gauthier Villars, 1899) (ouvrage élémentaire)

J. Richard: Leçons sur les méthodes de la Géométrie moderne. Paris, Hermann, 1898. (ouvrage élémentaire)

Sir W. R. Hamilton. Lectures on Quaternions London 1853.
id: Elements of Quaternions, London, 1866.

Study, Geometrie der Dynamen, Leipzig, 1901.

Sir R. S. Ball: A treatise on the theory of screws. Cambridge 1900 (nouvelle théorie de géométrie cinématique)



1)

(3) Carnot: Géométrie de position. Paris, 1803.

Poncelet: Traité des propriétés projectives des figures. Paris 1822.

Möbius: der barycentrische Calcul. Leipzig, 1827.

Plücker: Analytisch-geometrische Entwickelungen. 2 vol. Essen 1828-31.

(2) Plücker: System der analytischen Geometrie. Berlin, 1835.

Chasles: Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, suivi de ~~deux~~ Mémoires sur la dualité et l'homographie. 1837 (2e éd. Paris, 1875; 3e éd. 1889).

Chasles: Traité de Géométrie supérieure. Paris, 1852.

Chr. von Staudt: Geometrie der Lage. Nürnberg 1847.

id. Beiträge zur G. d. L. 3 fasc. 1856-60.

(1) J. Steiner: Vorlesungen über synthetische Geometrie, 2 parties. (1867. Leipzig.)

Th. Reye: Geometrie der Lage. Hannover 1866.

L. Cremona: Elementi di geometria projettiva, Roma, 1873 (trad. franç. chez Gauthier Villars)

Hankel: Vorlesungen über die Elemente der projectivischen Geometrie. Leipzig, 1875.

Clebsch: Vorlesungen über Geometrie, éditées par Lindemann, trad. par Benoist. 3 vol. Paris, Gauthier Villars. 1879-83.

(2) Plücker: Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Leipzig, Teubner 1869.

(1) J. Steiner: Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Berlin, 1833.

(3) Traité de la corrélation des figures de Géométrie.

E

Cournot -
Cantor -
Stolz -
Clebsch -
Riemann -
Beltrami -
Helmholtz -
P. Tannery -
Lechalas.
Broglie.
Andrade
Poincaré.
Picard.
Cayley.
Bibliographie -
Formulis.
J. Bertrand (Charmod.)

Cournot -

Cournot. Extraits



Notice biographique sur Cournot
(d'après M. Charpentier, ap. Revue philosophique t. XI, p. 494.)

1801 (28 août) Naissance de Cournot à Gray (Hte Saône)
1821. Cournot élève de l'Ecole Normale
1822. Suppression de l'Ecole Normale
1831. Mémoires du maréchal Gouvion St Cyr
1834. Cournot professeur de math. à la Faculté de Lyon. Traductions : Astronomie d'Herschell, Eléments de mécanique de Kaater et Lardner
1835. Cournot professeur et recteur de l'Académie de Grenoble
1836. 2e édition de l'Astronomie d'Herschell
1838. Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses. – 18 sept : Cournot inspecteur général
1841. Traité de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal
1842 Edition des Lettres à une princesse d'Allemagne, d'Euler 2e édition de la Mécanique de Kaater, etc
1843. Recherches sur la théorie des chances et des probabilités.
1845. Cournot officier (?) de la Légion d'honneur
1847. Correspondance entre l'algèbre et la géométrie
1851. Essai sur les fondements de nos connaissances ....
1854. (22 août) Cournot recteur de l'Académie de Dijon
1857. Traité des fonctions, 2e édition.
1861. Traité de l'enchaînement des idées fondamentales dans la science et dans l'histoire.
1862 (février) Cournot recteur honoraire
1863. Principes de la théorie des richesses.
1864. Les institutions d'instruction publique en France.



H

1872. Considérations sur la marche des idées et des événements dans les temps modernes.

1875. Matérialisme, vitalisme et rationalisme.

1877. Revue sommaire des doctrines économiques.

(30 mars.) Mort de Cournot.

Tous les ouvrages de Cournot ont paru chez Hachette

Cournot, De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie. Paris, Hachette, 1847.

« Les nombres imitent l'espace, qui sont de nature si différente. »
Pascal, *Pensées* (t. I, p. 202 éd. Faugère)

Ch. I. De l'arithmétique pure.

§1. Idée de nombre (cf. Essai, § 184.) Sa valeur rationnelle (§ 186.) Nécessité du signe.

2. D'où la numération, système de signes conventionnels, qui suppose déjà la théorie des nombres ~~(la divisibilité)~~

3. Un nombre est une collection ou un groupe d'*unités* décomposable en d'autres groupes (d'où addition, soustraction). Propriété commutative de la multiplication: « Soit un groupe *a* composé de *m* groupes de *n* unités chacun: il est clair qu'on peut prendre une unité dans chacun des *m* groupes pour en former un nouveau groupe de *m* unités, et répéter *n* fois cette opération, de manière à transformer le système primitif dans le système de *n* groupes de *m* unités chacun. » Nombres premiers. Nombres premiers entre eux. Divisibilité.

4. Groupes de divers ordres. Puissances; racines. Relation entre la suite des nombres impairs et la suite des nombres carrés. On peut toujours décomposer un nombre qque en une somme de 4 carrés. Toutes ces propriétés des nombres sont indépendantes du système de numération, et peuvent s'exprimer par les signes de l'algèbre, quoique les lettres désignent toujours dans ce cas des nombres entiers.



5. La numération décimale, comme toute autre, suppose les notions de puissances, de facteurs, de divisibilité et de restes (ou résidus.) C'est une division du nombre à exprimer par le nombre *dix* et ses puissances. Les *quatre règles*, fondées sur l'algorithme décimal, impliquent les idées fondamentales d'addition, soustraction, multiplication et division, indépendantes du système de numération et antérieures à lui; il faut donc bien distinguer les opérations fondamentales des règles de calcul particulières à tel système de notation, et qui dépendent des signes employés. Ainsi ~~l'opération de~~ l'élévation aux puissances ~~n'est~~ ne demande pas d'opération nouvelle comme l'opération de l'extraction de racines.

« Dans l'arithmétique ordinaire se trouvent mélangées des règles et des théories qui n'ont ni la même valeur ni la même origine: les unes portant sur les propriétés essentielles et abstraites des nombres, les autres se référant à la loi des signes artificiels employés pour représenter les nombres »

6. La théorie des nombres a d'étroites connexions avec celle des combinaisons et de l'ordre. Nombres ordinaux.

Ex. Le nombre de combinaisons de m objets avec n autres (un à un) est égal à mn ou nm (ce qui démontre la propr. commutative) Nombre des combinaisons de m objets entre eux (deux à deux): $\frac{1}{2}m(m-1)$; de m objets n à n: $\frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n}$

ce qui démontre ~~un~~ le théorème d'arithmétique:
~~tout~~ Le produit de n nombres entiers consécutifs est divisible par le produit des n premiers nombres entiers.

7. Nombre des arrangements de m objets n à n: $m(m-1)\dots(m-n+1)$
Nombre des permutations de n objets: ~~$n!$~~ $1.2.3\dots n$
Le nombre des arrangements de m objets 2 à 2 est le nombre des

dispositions qu'on peut donner à 2 objets dans une suite de m places. La permutation est un cas particulier de la disposition, quand le nombre des objets devient égal au nombre des places.

Soit un système de m places décomposé en 2 groupes partiels A et B comprenant l'un n places, l'autre $m-n$ places : on y range m objets : on a ainsi ~~1.2.3~~ ... $m!$ arrangements. Mais si l'on n'a en vue que le partage des éléments entre les 2 groupes partiels, il ne faut plus regarder comme distincts les arrangements qui ne diffèrent que par des transpositions d'ordre dans le groupe A, ou par des transpositions d'ordre dans le groupe B. Il faut donc diviser le nombre total des arrangements par celui des permutations dans le groupe A : $n!$ et par celui des permutations dans le groupe B : $(m-n)!$ ce qui donne :

$$\frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

On retombe ainsi, en se laissant guider par la seule idée de l'ordre sur le résultat auquel avait conduit la seule idée de combinaison. La même question d'ordre se présente d'une autre manière : le même nombre exprime de combien de manières distinctes on peut ranger n lettres A et $(m-n)$ lettres B.

8. Les liaisons entre la théorie des nombres et la théorie de l'ordre deviennent surtout remarquables quand on considère l'ordre périodique. La série de période : abcde engendre, quand on prend les termes de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4, les séries de périodes respectives acebd, adbec, aedcb ; ces séries sont inverses deux à deux. Si dans une série dont la période contient m éléments, on prend les éléments de n en n, (n étant premier avec m) on forme une autre série dont la période contient les m éléments dans un autre ordre. — La série obtenue en prenant les termes de n en n est inverse de celle qu'on obtient en les prenant de $(m-n)$ en $(m-n)$.



On peut démontrer certains théorèmes d'arithmétique (sur la multt on par exemple) au moyen de la considération de l'ordre périodique (cf. Poinsot, Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres ap. Journal de Liouville tome X.)

Ch. II. Application des nombres à la mesure des grandeurs continues

9. « Tous les phénomènes sensibles nous suggèrent l'idée de grandeur continue, c.à.d. l'idée d'un tout homogène susceptible d'être divisé, au moins par la pensée, en tel nombre qu'on voudra de parties parfaitement similaires ou identiques, ce nombre pouvant croître de plus en plus sans que rien en limite l'accroissement indéfini. Nous disons que les phén. sensibles nous suggèrent l'idée de la continuité et non qu'ils nous la donnent, puisque l'expérience sensible ne peut opérer qu'une division limitée. C'est par une vue de la raison que l'idée de la continuité .. est saisie dans sa rigueur absolue #»

La distance entre 2 corps ne peut varier qu'en passant par tous les états intermédiaires de grandeur, en nombre illimité ou infini. De même le temps.

Notion de mesure: nombre de fois qu'une grandeur donnée contient une certaine grandeur de même espèce, prise pour unité (autre sens du mot unité) Comme on peut subdiviser l'unité suivant une loi qcq, en autant de parties que l'on veut, susceptibles de servir d'unités secondaires, on peut obtenir d'une grandeur donnée une expression numérique aussi approchée qu'on le veut, puisqu'elle tombe nécessairement entre deux grandeurs susceptibles d'une expression numérique exacte, et dont la différence peut être rendue aussi petite qu'on le veut.

L'approximation est nécessairement limitée dans la pratique, mais elle est théoriquement illimitée.

10. Les grandeurs représentées par des nombres sont des quantités ; on peut les soumettre aux opérations de l'arithmétique. (§ 186.) — Diviser un nombre m par un nombre n, c'est trouver le quotient exact ou approché à moins d'une unité. Mais si le nombre m mesure une grandeur continue qu'il faille diviser en n parties égales, le quotient exact q, donné par la division arithmétique, mesurera chacune de ces parts. Dans le cas contraire, il y aura un reste r moindre que n, qu'il faudra diviser en n parties égales pour joindre une de ces parties à ~~celle~~ la grandeur qui mesure le quotient approché q, et compléter ainsi la n^e partie de la grandeur m. Pour partager le reste r en n parts égales, il suffira de partager l'unité en n parts égales et d'en prendre r (puisque r est moindre que n.) D'où la *fraction* $\frac{r}{n}$, et plus généralement $\frac{m}{n}$, qui mesure la grandeur obtenue en divisant la grandeur m en n parties égales, que le nombre m soit ou ne soit pas divisible par n. (Si $m = nq + r$, $\frac{m}{n} = q + \frac{r}{n}$.) — La division impossible arithmétiq^t est toujours possible quand il s'agit de grandeurs continues, puisqu'on peut prendre pour unité nouvelle la n^e partie de l'ancienne.

11. Le rapport d'une grandeur A à une grandeur B de même espèce est le nombre qui mesure A si B est prise pour l'unité. Si A et B, rapportés à une unité C, sont mesurés respectiv^t par les nombres m et n, on a : $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$ (puisque A contient m fois la n^e partie de B.) La division, qu'elle soit possible ou non arithmétiq^t, a pour but de déterminer le rapport de deux grandeurs.

Grandeurs incommensurables (incomm. avec l'unité = irrationnelles)
A priori, il est infiniment peu probable que 2 grandeurs de même espèce, prises au hasard (c.à.d. déterminées par des causes indépendantes)



soient rigoureusement commensurables. L'expérience ne peut donner la confirmation de cette vue de l'esprit, puisque toute mesure expérimentale n'est jamais qu'approchée; mais la théorie fournit la preuve directe de l'incommensurabilité d'une foule de grandeurs.

12. Que signifie multiplier ou diviser par une fraction? Idée de variation proportionnelle: c'est la fonction la plus simple. Exemple: mouvement uniforme. L'espace décrit dans un temps donné s'obtient par des multiplications ou divisions arithmétiques; il suffirait de changer l'unité de temps, qui est arbitraire, pour substituer à une opération arithmétique l'opération inverse, les grandeurs restant les mêmes. Or la nature ~~de la~~ liaison est indépendante, non seulement des valeurs particulières attribuées aux grandeurs que l'on compare, mais encore des unités dont on a fait choix pour chaque espèce de grandeurs. Si donc nous voulons conserver dans le signe ou dans l'expression de l'idée le degré d'abstraction ou de généralité qui se trouve dans l'idée même, il faudra désigner par le même terme le lien mathématique qui existe entre le nombre v qui mesure l'espace décrit dans l'unité de temps, le nombre t qui mesure le temps écoulé durant le mouvement, et le nombre e qui mesure l'espace décrit pendant ce temps; ces 3 nombres pouvant être entiers ou fractionnaires. On dira que e est le produit de v par t (et on écrira: $e = vt$) ~~et~~ alors on considérera la division de v par 2, 3, 4 comme la multiplication de v par les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.

13. Est-ce là une pure convention, une arbitraire définition de mots, ou bien une définition d'idée, la juste expression d'un rapport que nous percevons entre les choses mais que nous n'y avons pas mis?

C'est une question d'ordre logique ou critique qui ne se tranche pas par une démonstration mathématique, et dont la solution n'a aucune conséquence scientifique. — Cette notion de multiplication par les fractions est une notion nécessaire, tenant à la nature même des choses, et non une définition conventionnelle qui n'aurait d'autre raison que le besoin de donner au discours plus de brièveté [et d'uniformité].

Admettons pour un moment qu'il y ait une science dans laquelle on traite des liens qui existent entre les grandeurs, indépendamment des valeurs particulières dont elles sont susceptibles, et des unités arbitraires qui en déterminent l'expression numérique, et que cette science s'appelle algèbre : on dira alors que e est le produit algébrique de 8 et t ; la multiplication algébrique donnant lieu, suivant les cas, et d'après le choix de l'unité arbitraire, tantôt à une mult^on^, tantôt à une division arithmétique, tantôt à une combinaison de ces deux opérations. — De même, division algébrique

14. Loi de la chute des corps : $e = \frac{1}{2} g t^2$ (espaces prop aux carrés des temps.) Cette relation ne dépend nullement du choix des unités arbitraires d'espace et de temps, et doit subsister pour des valeurs correspondantes q^conques^ de ces 2 grandeurs, quelle qu'en soit l'expression numérique. Trouver le temps t correspondant à $e = \frac{7}{2} g$: on obtient la valeur indéfiniment approchée de t, mais jamais la valeur exacte, 7 n'étant pas carré : t est donc incommensurable avec l'unité de temps.

15. En arithmétique pure, l'extraction de la racine s'arrête naturellement aux nombres entiers (avec ou sans reste, comme pour la division) & L'opération ne peut pas avoir d'autre sens tant qu'on ne considère les nombres en eux-mêmes ; mais du moment qu'on les conçoit ~~comme~~ appliqués à la mesure des grandeurs continues, après un choix préalable d'unités arbitraires, l'opération prend un autre sens :



elle consiste à évaluer en fractions de l'unité choisie une grandeur assujettie à croître proportionnellement aux racines carrées des nombres qui mesurent une autre grandeur, quelle que soit l'unité choisie, et si petite qu'on la suppose..... En ce sens l'opération est toujours possible, elle tend toujours à un résultat déterminé » dont on peut obtenir une valeur exacte ou indéfiniment approchée. D'où le signe $\sqrt{m}$, qui définit rigoureusement une grandeur, que $\underline{m}$ soit ou non carré parfait ; de même que $\frac{m}{n}$ représente exactement la grandeur qui résulte de la division de la grandeur $\underline{m}$ en $\underline{n}$ parties égales, que $\underline{m}$ soit ou non divisible par $\underline{n}$. Ces signes représenteront ces grandeurs dans le cours des calculs ultérieurs, de manière à garder pour la fin l'opération qui consiste à tirer de cette expression rigoureuse une évaluation numérique approchée (s'il y a lieu.)

« On voit par là comment des signes qui n'étaient ou pouvaient n'être originairement que l'indication d'une opération à effectuer sur des nombres, ou d'un lien mathématique entre des grandeurs, indépendant de leurs valeurs particulières, viennent s'incorporer à l'expression même des grandeurs déterminées et isolées. »

16. « Ainsi l'on est conduit à inventer un système de signes généraux, qui n'étaient que commodes lorsqu'il s'agissait de spéculations sur les nombres purs, et qui deviennent nécessaires quand le but est d'étudier les propriétés des grandeurs continues et les liaisons que ces grandeurs ont entre elles. » Ainsi conçue, la théorie des grandeurs est l'arithmétique universelle de Newton, ou la logistique des vieux auteurs : elle ne dépend point du système artificiel de numération, ni des procédés de calcul fondés sur ce système.

« Elle emprunte sans doute à la théorie des nombres ou à l'arithmétique pure les notions fondamentales de facteurs et de produits, de puissances et de racines, mais pour leur faire immédiatement subir une extension exigée par la nature des grandeurs continues.... Il ne peut plus être question des propriétés des nombres en tant que pairs ou impairs, premiers ou composés, carrés ou non carrés, en un mot de toutes celles qui varient brusquement dans le passage d'un nombre à ceux qui l'avoisinent ; ces propriétés, incompatibles avec la loi de continuité, restant l'objet propre de la théorie des nombres considérés en eux-mêmes et indépendamment de toute application à la mesure des grandeurs continues ou à l'expression des rapports de ces grandeurs. »

17. Relations entre les diverses branches des mathématiques, par ex. entre la théorie des fractions et la théorie des nombres purs, ou de l'ordre et des combinaisons.

18. La logistique est indépendante de l'arithmétique et de l'algèbre quoiqu'elle emploie tour à tour les signes de ces deux sciences. Elle contient en germe l'algèbre, qui n'est pas seulement un art, une langue ou un instrument à l'usage de la théorie des nombres ou de la logistique, mais une science ayant son objet propre.

Ch. III. De l'emploi des nombres et des grandeurs continues pour la détermination des rapports de situation.

19. « De même que les nombres peuvent être considérés, d'abord dans leur nature propre, puis dans l'application qu'on en fait à la mesure ou à la détermination des grandeurs, ainsi les grandeurs peuvent être étudiées, d'abord en elles-mêmes ou dans les propriétés qui tiennent à leurs caractères généraux et essentiels, ensuite dans l'emploi qu'on en fait, et qu'on est nécessairement conduit à en faire



pour la détermination des rapports de situation. »

Exemples. On peut mesurer par un nombre la durée d'un phénomène; on peut aussi désigner par un nombre la date d'un phén. instantané. L'un et l'autre nombre dépendent du choix arbitraire de l'unité; mais le second dépend en outre du choix arbitraire de l'origine. Le 1er représente une grandeur; le 2e, une situation.

20. Grandeurs à deux sens inverses l'un de l'autre (comme le temps). Nécessité d'un double signe pour distinguer les deux côtés de l'origine. Un déplacement de l'origine fait croître ou décroître tous les nombres d'un même nombre. D'où règles d'addition des nombres pos. & nég.

21. Comment on est amené à désigner les nombres pos. & nég. par les signes + et −. Soient: $g, h, i, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, \ldots$ les dates (en valeur absolue) d'une suite d'événements rapportés à l'événement o. Si l'on reporte l'origine à l'événement $\underline{k}$, les nouvelles dates seront: $k-g, k-h, k-i, 0, k-l, k-m, k-n, k, k+p, k+q, k+r, \ldots$ ce qui revient à ajouter le nombre $\underline{k}$ aux dates:

$$-g, -h, -i, -k, -l, -m, -n, 0, +p, +q, +r, \ldots$$

Comme k est plus petit que g, h, i, $(k-g) = k-k-(g-k) = -(g-k)$, d'où les nombres négatifs. — Si au contraire on reporte l'origine à l'événement $\underline{r}$, cela revient à retrancher r à toutes les dates, ou à leur ajouter $\underline{-r}$. § 22: Identité fondamentale: $-(r-q) = q-r = -r+q$. qu'on peut établir par la considération de 3 points sur une droite. D'où règle des signes énoncée déjà par Diophante (livre I, déf. 9) indépendante de l'algèbre. Elle résulte de la considération de grandeurs susceptibles de croître ou de décroître symétriqt de part et d'autre d'une origine arbitraire, d'où naît une parfaite symétrie entre les opérations d'addition et de soustraction appliquées à ces grandeurs, symétrie qui n'existe pas pour les nombres purs.

23. « Doit-on regarder toute cette théorie des nombres négatifs comme une pure convention ? Dire qu'on ajoute la valeur négative −3, au lieu de dire qu'on retranche la valeur 3, n'est ce pas recourir à un artifice de langage, commode peut-être pour les applications scientifiques, mais d'ailleurs arbitraire, comme lorsqu'on dit que l'on multiplie par la fraction $\frac{1}{3}$, au lieu de dire simplement qu'on divise par 3 ? Nous répondrons qu'il en est précisément de l'une de ces locutions comme de l'autre ; que toutes deux sont amenées nécessairement par le besoin d'exprimer les vraies relations des grandeurs, et d'effacer au contraire ce qu'il y avait primitivement d'arbitraire et de conventionnel, par suite .... de trop particulier dans notre manière de les concevoir et de les exprimer. L'origine ou le zéro est arbitraire pour certaines grandeurs, comme l'unité est arbitraire pour les grandeurs continues. Il est essentiel de pouvoir exprimer, indépendamment du choix arbitraire du zéro ou de l'unité, des relations générales entre les grandeurs... sans quoi l'expression ne serait qu'imparfaitement adaptée à l'idée qu'elle doit rendre .... C'est à quoi satisfait la notation des quantités négatives, comme celle des quantités fractionnaires »

Pourquoi les quantités négatives sont-elles moins aisées à accepter que les fractions ? Parce que l'idée d'unité arbitraire est plus familière que celle du zéro, et celle-ci est plus abstraite ; quoique les notions d'addition et de soustraction soient plus simples que celles de mult^{on} et division, et logiq^{t} antérieures.

24. De même qu'on appelle addition et soustraction algébriques les opérations sur les nombres affectés de signes, on devrait appeler mult^{on} et division algébriques les opérations sur les fractions. On bien réserver ces termes aux opérations à effectuer sur des polynômes et littéraux.
(la distinction de la résolution numérique et algébrique des équations



repose sur l'opposition des lettres aux nombres comme caractérisant l'algèbre en comparaison de l'arithmétique.)

25. Les nombres positifs et négatifs sont incommodes pour représenter des grandeurs symétriques ou inverses, telles que la soustraction de l'une équivaut à l'addition de l'autre, et inversement, quoique ni l'une ni l'autre n'aient une origine arbitraire. Ex: fluides électriques; bilan du négociant.

Ch. IV. ~~26~~ De l'algèbre. Origine des valeurs imaginaires.

26. Difficulté de définir l'algèbre. Poinsot: c'est la science de l'ordre.

27. Les symboles algébriques servent d'abord à généraliser les raisonnements d'arithmétique ou de logistique (sur les nombres ou sur les grandeurs continues.) Mais ces symboles ont leurs règles propres, qui sont l'objet d'une science spéciale. Ex: polynômes; binôme de N. 卐 On voit ainsi en quoi l'algèbre tient de la science de l'ordre ou des combinaisons. — L'algèbre est d'abord une langue ou un instrument, puis un corps de vérités abstraites, qui sont des applications de la ~~théorie~~ science de l'ordre à la théorie des grandeurs. — « Il est contre la nature des choses de pouvoir donner de l'algèbre une définition tranchée... Car il est contre la nature des choses que nous puissions définir, c.à.d. caractériser par des signes discontinus, tels que les termes du langage, des objets de la pensée qui se modifient ~~et~~ et se transforment sans discontinuité, ou par gradations insensibles. »

卐 La formule du binôme est indépendante de l'idée de multiplication et de toute idée de grandeur; elle repose sur la considération des combinaisons aussi s'applique-t-elle à toutes sortes de combinaisons analogues. (formule de Leibniz pour la différentiation d'un produit.)

28. L'équation est l'instrument propre et caractéristique de l'algèbre. Les formules algébriques supposent que les grandeurs qui y figurent sont continues et à double sens, c.à.d. à unité et à origine arbitraires.

29. La notion des imaginaires n'a pu être fournie que par l'algèbre. La valeur imaginaire n'est plus une grandeur; elle n'est ni plus grande ni plus petite qu'une autre; et cependant elle peut être la somme, la différence, le produit, etc. de deux autres. Les valeurs imaginaires n'ont de sens que parce qu'elles peuvent être soumises aux opérations du calcul algébrique aussi bien que les quantités réelles; mais ces opérations n'ont plus le sens d'opérations sur les grandeurs; ce ne sont que des combinaisons abstraites. La considération des valeurs imaginaires est donc essentielle à l'algèbre en tant que celle-ci procède de la théorie des combinaisons et de l'ordre. Si l'on ne tenait point compte des valeurs imaginaires, la théorie des équations, et en général toutes les théories algébriques perdraient leur régularité, leur symétrie, leur généralité, comme si l'on ne tenait pas compte des valeurs fractionnaires, incommensurables ou négatives.

30. Dans les problèmes sur les grandeurs, il suffit que le calcul algébrique aboutisse à des valeurs réelles. Rien n'empêche que dans le cours des calculs intermédiaires on soit conduit à comparer entre elles des expressions imaginaires auxquelles continuent de s'appliquer les règles de combinaison et de syntaxe qui constituent le mécanisme du calcul, de manière que, les symboles d'imaginarité se détruisant finalement les uns les autres, on se trouve avoir donné à l'aide de ces symboles la démonstration de propriétés inhérentes aux nombres ou aux grandeurs, plus simplement qu'on n'aurait pu le faire sans l'emploi transitoire de ces symboles auxiliaires. Pour cette raison le degré de généralité de l'algèbre en tant que système de relations abstraites, constitue sa puissance en tant qu'instrument logique.



31. Exemple : $(a+bi)^m = A + Bi \qquad (a-bi)^m = A - Bi$

d'où : $(a^2+b^2)^m = A^2 + B^2$ théorème d'arithm.

La validité de ce résultat vient de ce que les premières formules reposent seulement sur les propriétés générales des combinaisons et non sur le sens particulier des opérations à effectuer sur les grandeurs.

Ch. V. De la traduction des problèmes en algèbre.

35. L'algèbre est une langue sans doute, mais une langue dont nous ne sommes pas maîtres, comme nous pourrions l'être d'une langue d'origine conventionnelle, parce que l'algèbre est aussi une science ayant sa constitution propre, son objet dans des idées, dans des rapports que l'esprit humain ne crée pas arbitrairement et de toutes pièces. Il en résulte que, lorsque nous voulons appliquer l'algèbre à la solution de problèmes sur les grandeurs, l'algèbre ne peut pas toujours traduire toutes les conditions du problème, répondre directement et uniquement à la question posée, dans le sens où nous la posions et de la manière que nous l'entendions.

Exemples tirés du calcul des probabilités.

37. Problème du puits. Éq. du problème $\sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{h} = t$.

On trouve 2 racines. La racine étrangère vérifie l'équation conjuguée : $-\sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{h} = t$

On l'a introduite en élevant au carré, ce qui ~~laisse~~ rend le signe du radical indéterminé.

39. Parmi plusieurs problèmes analogues, l'algèbre associe les uns et disjoint les autres, sans que la séparation ni la réunion tiennent à la nature de la question.

40. Le groupement des solutions est autre si le radical est cubique, bien que le nombre des solutions des problèmes ne ~~tienne~~ dépende ni du degré du

radical, ni même de la possibilité de représenter algébriq- la loi de chute.
Cet exemple suffit pour faire comprendre ce qu'il y a d'accidentel dans le groupement algébrique des solutions appartenant à divers problèmes.

41. Cela est encore vrai des problèmes, non plus physiques mais arithm où les signes de l'algèbre et les nécessités du calcul introduisent une généralité qui n'est pas dans l'énoncé, et par suite des solutions étrangères à la question.

42. Signification des racines négatives; leur interprétation

Ch. VI. Traduction en algèbre des problèmes de géométrie

43. Problème du rectangle encadrant un rectangle donné à une distance constante, et ayant une aire donnée. L'association des racines est accidentelle, et non essentielle.

44. Aussi le groupement des solutions est-il tout autre dans le problème analogue de l'espace, où l'équation est du 3e degré.

45. Problème de la sécante menée par un point donné et déterminant dans un angle droit un triangle d'aire donnée. Il y a 4 solutions; 2 équations.

46. Problème analogue: la somme des côtés de l'angle droit du triangle est donnée. 4 solutions, 3 équations

47. Problème analogue: la longueur de l'hypoténuse, c à d la somme des carrés des côtés de l'angle droit, est donnée. 1 équation

48. Problème analogue: la somme des cubes des côtés est donnée. Toujours 4 solutions, et 3 équations

49. Divers définitions de l'hyperbole équilatère (enveloppe de la droite du § 45.) La liaison des branches (une dans ch angle droit) varie suivant la définition géométrique. La liaison algébrique coïncide avec la définition de l'hyperbole comme section conique



50. Les trois problèmes des §§ 46, 47, 48 sont des cas particuliers du problème général : Enveloppe des hypoténuses des triangles rectangles tels que la somme des n^{e} puissances des côtés de l'angle droit ait une valeur donnée. On voit que le groupement des 4 solutions varie avec n.

51. Dans le cas : $n = 1$ (§ 46) parabole limitée ; une autre définition (des 4 courbes dans les 4 angles droits) donne la même courbe illimitée. De plus, la définition par section conique ne donne qu'une branche ; tandis que dans ce problème deux paraboles sont associées symétriq^t comme les 2 branches d'une hyperbole.

52. Si $n = 2$, on a la développée d'une ellipse infiniment grande. Cette définition conserve l'association des 4 branches limitées qui forment le lieu géométrique cherché.

53. Pour $n \geq 3$, il n'y a plus à proprement parler de définition géométrique des courbes : la puissance n^{e} d'un côté n'a plus de sens géométrique ; tandis que l'aire d'un triangle (§ 45) la somme de ses côtés et la longueur de son hypoténuse étaient des données géométriques.

54. Application systématique de l'algèbre à la géométrie au moyen des coordonnées.

55. Les coordonnées rectilignes admettent toutes les valeurs positives et négatives de x et y, sans répétition, ambiguïté ni lacune.

56. L'équation : $xy = \frac{k^2}{2}$ associe les 2 branches de l'hyperbole comme la définition par section conique ; l'éq : $-xy = \frac{k^2}{2}$ représente les 2 autres branches (§ 45).

Selon que le degré de l'équation est pair ou impair, les courbes d'une même famille se trouvent alternativ^t associées et dissociées ; ce qui ne tient pas à la nature des choses mais aux propriétés des symboles algébriques.

58. L'accord de la définition algébrique des sections coniques avec leur déf. géom. provient de l'accord de l'algèbre et de la géom. dans la définition du cercle.

Ch. VII. Les fonctions et leur représentation graphique.

59. L'application de la géométrie à l'algèbre (bien moins féconde que celle de l'algèbre à la géométrie) a pour utilité de fournir une représentation sensible de la loi de continuité dans la variation des grandeurs.

60. La supériorité des coordonnées cartésiennes sur tous les autres systèmes n'est pas moins sensible dans cette application que dans l'autre : aussi sont-elles exclusivt employées. Elles permettent de figurer par une courbe la marche d'une fonction qcque, en considérant toutes les valeurs, tant positives que négatives, de la variable et de la fonction. En effet pour que l'indétermination géométrique du point corresponde à l'indétermination algébrique du système (x, y) il faut choisir une étendue plane, et y mener des axes rectilignes, de préférence rectangulaires.

61. Les autres systèmes de coordonnées peuvent être utiles pour représenter algébriqt certaines figures ; mais le seul système cartésien convient pour représenter géométriqt des fonctions quelconques. Ce n'est donc pas une convention arbitraire (que la représentation graphique) mais un choix dicté par la nature des idées et la généralité des grandeurs cartésiennes.

63. Fonctions transcendantes (ex : cycloïde ; oscillation du pendule) qu'on peut définir et calculer mathématiqt. Fonctions empiriques (non mathématiques). Toutes sont susceptibles de représentation graphique.

64. D'où théorie des fonctions, et de leurs propriétés générales (continuité, &a) indépendante de l'arithmétique et de l'algèbre. Elle se traduit naturellement par la représentation graphique, symbole approprié à la loi de continuité. Cette représentation est la même (ou du moins analogue) que les fonctions soient ou non susceptibles d'une expression algébrique.

67. Quand on considère certains problèmes de géométrie comme des cas particuliers de problèmes de physique, où certains coefficients (densité, &a) ont une valeur constante, la question philosophique consiste à rechercher pourquoi le système des diverses solutions, en traversant cet état singulier



(d'homogénéité) présente momentanément tel mode de conjugaison algébrique plutôt que tel autre. Le fait que les fonctions peuvent s'exprimer algébriq^t est un accident dans leur variation continue liée à certains paramètres arbitraires.

Ch. VIII. Lignes algébriques et géométriques. Géométrie analytique.

68. Courbes algébriques, transcendantes, empiriques. Ordre = degré.

69. Le nombre des points d'intersection de 2 cbes alg. l'une d'ordre m, l'autre d'ordre n, est au plus mn. Il n'en est pas de même pour les cbes transcendantes.

70. Continuité des cbes algébriques : elles n'ont de discontinuité qu'en passant par l'infini.

71. Descartes appelle géométriques nos cbes algébriques, et mécaniques nos cbes transcendantes. Or on peut définir géométriq^t certaines cbes transcendantes (la cycloïde par ex.) et on ne peut définir géométriq^t ~~un grand nombre~~ la plupart des cbes algébriques, même lorsqu'on pourrait les construire par la règle et le compas. — La spirale logarithmique (cbe transcendante) est susceptible d'une définition géométrique et d'une définition analytique.

72. Désaccord entre la définition algébrique et géométrique d'une cbe. Le mode d'accouplement des trajectoires orthogonales d'une famille d'ellipses, dans le cas de la commensurabilité des carrés des deux axes issus du centre, et selon que les nombres m et n (termes de la fraction irréductible $\frac{m}{n}$ qui exprime le rapport de ces carrés) sont pairs ou impairs, est un fait de pure algèbre, une conséquence de la règle des signes qui ne correspond ici à aucun fait géométrique.

73. Il se trouve que l'équation : $y = ax$ représente parfaitement la ligne droite indéfinie dans le système de coordonnées ~~rectiligne~~ rectilignes. C'est l'expression algébrique du théorème de Thalès. Le système cartésien

a donc l'avantage d'établir une correspondance exacte entre la définition algébrique et la déf. géom. de la ligne droite. Droite qcq. : $y = ax + b$.

74. $a = \tan\alpha$. Définition des <u>lignes goniométriques</u>.

75. Formules de transformation des coordonnées (rotation des axes : ω.)

76. Des formules :

$$x = x'\cos\omega - y'\sin\omega \qquad x' = x''\cos\omega' - y''\sin\omega'$$
$$y = x'\sin\omega + y'\cos\omega \qquad y' = x''\sin\omega' + y''\cos\omega'$$

on tire :

$$x'' = x(\cos\omega\cos\omega' - \sin\omega\sin\omega') + y(\sin\omega\cos\omega' + \cos\omega\sin\omega')$$
$$y'' = -x(\sin\omega\cos\omega' + \cos\omega\sin\omega') + y(\cos\omega\cos\omega' - \sin\omega\sin\omega')$$

Or on doit avoir :

$$x'' = x\cos(\omega+\omega') + y\sin(\omega+\omega')$$
$$y'' = -x\sin(\omega+\omega') + y\cos(\omega+\omega')$$

d'où les formules d'addition des angles. Elles sont générales, et s'étendent à la rotation indéfinie d'une demi-droite autour de l'origine. ~~Ainsi les lignes goniométr.~~ De même pour les formules de soustraction.

77. De la formule : $\cos(\omega - \omega') = \cos\omega\cos\omega' + \sin\omega\sin\omega'$

on tire $(\omega = \omega')$ $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$

d'où l'éq. du cercle de ray. 1 : $x^2 + y^2 = 1$,

et l'éq. du cercle de ray. r (par la considération de la similitude ou en vertu du principe de l'homogénéité) : $x^2 + y^2 = r^2$.

Ainsi l'équation du cercle est virtuellement contenue dans celle de la ligne droite, et l'accord de la géom. et de l'algèbre ds la définition du cercle est la conséquence logique de leur accord pour la ligne droite.

Ces 2 lignes sont uniformes [homoeomères, disait Proclus : v. P. Tannery.] et leur cours est indéfini [la circonférence se prolongeant elle-même sans fin]

78. L'éq. du cercle traduit le <u>théorème de Pythagore</u> comme celle de la droite celui de Thalès. Tel est l'ordre rationnel de ces propositions et non l'ordre classique qui les fait dépendre de la théorie des aires, et qui fait ~~suivre~~ venir le th. de Thalès après celui de Pythagore dont le premier contient la raison.



79. Considérations analogues dans l'espace. 9 cosinus directeurs liés par 6 équations. D'où : $x^2+y^2+z^2=r^2$ équation d'une sphère ayant pour centre l'origine.

[Telles sont les synthèses primitives et irréductibles sur lesquelles est fondée la géométrie cartésienne. (1)

Ch. IX. Surfaces et lignes. Désaccord entre la géométrie et l'algèbre.

84. Il y a des propriétés des lignes et des surfaces qui ne dépendent pas de leur définition algébrique ou géométrique : par ex. le théorème de Meusnier ne suppose que la continuité de la surface au point considéré. D'où la géométrie générale, qui est à la géom. analytique ce que la théorie des fonctions est à l'algèbre.

85. Les classifications des lignes et des surfaces s'entrecroisent souvent, suivant les diverses analogies que l'on considère. Ainsi le cône et le cylindre appartiennent à la fois aux surfaces ~~[illegible]~~ développables et aux surfaces de révolution. La cycloïde est une épicycloïde ou une roulette à base rectiligne. Les épicycloïdes comprennent des courbes algébriques intercalées entre une infinité de courbes transcendantes.

[158. L'accord de l'algèbre et de la géométrie dans les th. de Thalès et de Pythagore suffit à constituer la géométrie analytique propr^t dite (de la ligne droite et du cercle ou de la règle et du compas ; les coniques se définissant comme projections du cercle.) Mais cet accord peut ne pas subsister pour la géométrie supérieure qui repose sur de nouvelles synthèses. v. § 144. (synthèses métriques.)

(1) 157. Les discordances qu'on remarque dans l'application à la géométrie des autres systèmes de coord. disparaissent et s'expliquent quand on les transforme en coord. cartésiennes, pour lesquelles la concordance est établie (v. ch. XI.)

159. La géométrie analytique est essentiellement projective ; au contraire la géométrie transcendante est métrique (elle emploie le calcul intégral) C'est l'opposition de la logistique et de l'algèbre, l'une portant sur des valeurs numériques, l'autre sur des formes et des relations de ordre.

86. Cissoïde de Dioclès et conchoïde de Nicomède: pourquoi ~~celle~~ la p^re^ n'a-t-elle pas deux branches, comme la seconde? Ce sont 2 cas particuliers d'un même genre de c^bes^. 87. L'association des 2 branches de l'une, la dissociation de celles de l'autre tiennent à des accidents d'algèbre, à la forme de leurs équations: comme l'assoc. ou dissoc. des 2 branches de l'hyperbole.
88. Le lieu des milieux des cordes d'un cercle passant par un p^t^ M est un cercle. Or, si M est extérieur, le lieu géom. n'est qu'une partie de ce cercle; tandis que l'éq. donne le cercle entier. C'est que le lieu ~~est~~ ne ~~ne~~ dépend pas du rayon du cercle donné, mais seulement de la position de son centre.
89. Parabole limitée, projection de l'intersection d'un cylindre et d'une sphère.
Ch. XI. Application de la géométrie à l'analyse déterminée.
90. La solution des problèmes d'analyse déterminée peut dépendre de lieux géométriques. — 91. Problème ~~de la sécan~~ des 2 segments de la sécante à un cercle. Si l'on cherche directement les 2 segm. d'une corde, on trouve une sol. négative.
92. C'est une racine étrangère, qui se trouve accidentell^t^ égale à la valeur géom. changée de signe.
93. Deux cordes rectang. à mener ds un cercle: la condition de possibilité disparaît, parce que les rayons vecteurs peuvent être imaginaires sans que ~~leurs~~ ~~dif~~ différences le soient.
94. Problème analogue pour la sphère.
95. On peut appliquer l'algèbre à la géométrie de deux manières: 1° par la géométrie analytique; 2° par les relations algébriques qui existent entre certaines fonctions des coord. qu'on introduit immédiat^t^ dans le calcul; dans ce cas on peut introduire des solutions étrangères, et ~~troubler~~ les conditions de possibilité du problème peuvent ne plus correspondre au cas de réalité des racines. On interprète ce désaccord en traduisant le problème en géom. analytique, et en discutant les relations algébriques qui lient les ~~coor~~ fonctions employées aux coordonnées.
Ainsi les problèmes d'analyse déterminée ne peuvent se discuter que par les principes généraux de la géom. analytique, qui correspond à l'analyse indéterminée.



Ch XI Méthode trigonométrique et coordonnées polaires.

101. Si l'on veut que la définition d'une cbe algébrique en coordonnées polaires cadre avec la définition en coord rectangulaires il faudra donner à l'eq. en coord polaires une forme rationnelle, et telle qu'elle ne change pas par le changement simultané de ω en $(\omega+\pi)$ et de r en $-r$; auquel cas on pourra, soit faire varier ω de 0 à π en prenant les valeurs négatives de r; soit faire varier ω de 0 à 2π, en ne prenant que les valeurs positives de r.

102. Cette corrélation n'existe plus pour les courbes transcendantes. Ex: spirale de Conon ou d'Archimède: $r = a\omega$

Spirale hyperbolique: $r = \frac{a}{\omega}$. La 1e a 2 branches symétriques qui se rejoignent à l'origine ($r=0$, $\omega=0$) et qu'il faut admettre en vertu de la continuité. La 2e a 2 branches symétriques qui ne se rejoignent pas; rien ne force donc à les associer.

Ch XII. Fonctions exponentielles et circulaires. Représentation graphique des imaginaires

104. $(\cos\omega + i\sin\omega)(\cos\omega' + i\sin\omega') = \cos\omega\cos\omega' - \sin\omega\sin\omega' + i\begin{pmatrix}\sin\omega\cos\omega' \\ +\cos\omega\sin\omega'\end{pmatrix}$

$= \cos(\omega+\omega') + i\sin(\omega+\omega')$

à rapprocher de: $a^{\omega}.a^{\omega'} = a^{\omega+\omega'}$

d'où l'analogie des fonctions circulaires et exponentielles. Posons

$\cos\omega + i\sin\omega = f(\omega)$ $\qquad f(\omega)f(\omega')f(\omega'')\ldots = f(\omega+\omega'+\omega''+\ldots)$

$[f(\omega)]^n = f(n\omega)$ Donc $\cos n\omega + i\sin n\omega = (\cos\omega + i\sin\omega)^n$

formule de Moivre, d'où l'on tire $\cos n\omega$ et $\sin n\omega$ (sans imagin.)

105. Si $\cos n\omega$ est donné (k) on a une eq. du n^e degré en $\cos\omega$: on devait s'y attendre, car il y a au moins n arcs qui sont la n^e partie de $\arccos k$. — 106. Inscriptions des polygones réguliers = division du cercle en n parties: Posons $\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} = x$

~~l'équation~~ la formule de Moivre donne $x^n - 1 = 0$

c.à.d. que les n racines de cette éq. sont $x = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$

$k = 0, 1, 2, \ldots\ n-1$. Polygones étoilés (Gauss, Poinsot, Chasles)

107. L'équation : $x^{n-1}+x^{n-2}+\dots+x^2+x+1=0$

a pour racines : $x=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$

$k=1,2,3,\dots\, n-1.$

109. Les nombres imaginaires $x+yi$ forment une ~~table~~ à double entrée ; donc ils peuvent représenter tous les points d'un plan ~~ou~~ ~~[illegible]~~ rapporté à 2 axes rectangulaires. Transformation en coordonnées polaires :

$r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\omega = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$.

$x+yi = r(\cos\omega+i\sin\omega)$

Pour justifier cette représentation, il faut que la multiplication de r par le facteur $(\cos\omega+i\sin\omega)$ corresponde à la rotation du vecteur réel $\underline{r}$ de l'angle ω ; or c'est ce qu'établit la formule de Moivre

$(\cos\omega+i\sin\omega)^n = \cos n\omega + i\sin n\omega$.

Réfutation du prétendu principe que i est un symbole de perpendicularité. Par ex. on peut dire que l'hyperbole est une ellipse dont l'axe est imaginaire (changement de b^2 en $-b^2$) mais cela ne veut pas dire que l'axe de l'hyperbole soit perpendiculaire à celui de l'ellipse ; il coïncide avec lui. De même, le passage du réel à l'imaginaire dans la corde commune à 2 cercles ne se traduit pas par une rotation d'un angle droit.

D'autre part, l'excentricité de l'ellipse passe du réel à l'imaginaire quand ses axes tournent d'un angle droit : $c=\sqrt{a^2-b^2}$ ou $\sqrt{b^2-a^2}$.

D'où 2 conceptions antagonistes des imaginaires.

110. Il ne faut pas confondre la représentation graphique des imaginaires avec les coordonnées cartésiennes du plan. La 1re ne peut s'étendre à 3 dimensions. De plus un point imaginaire d'une courbe est un symbole d'une possibilité, il n'existe nulle part dans le plan. Il ne faudrait pas croire qu'on puisse construire dans le plan cartésien une grandeur imaginaire en la faisant tourner d'un angle droit. — En somme, cette construction des imaginaires est plutôt un moyen d'appliquer la géométrie à l'algèbre que de traiter par l'algèbre des questions de géométrie.

Cf. Buée, Argand, Français, Gergonne, Mourey.

Vallès : Études φques sur la science du calcul. Paris 1841. | Faure, Th. et interpr. des quantités imaginaires. Paris, 1845.



Ch. XIII. Calcul infinitésimal.

112, 113. Signification géométrique de la dérivée et de la fonction primitive.

114. La quadrature des aires suppose le th. de la mesure du rectangle, qui ne peut se déduire des th. de Thalès et de Pythagore, bases de la géom. analytique (77, 78)

115. Cubature. Dans l'ordre logique, sinon historique et pédagogique, la quadrature du triangle et la cubature du tétraèdre sont des probl. de calcul intégral.

116. L'intégrale $\int (Y-y)\,dx$ ne donne pas l'aire absolue comprise entre les 2 cbes Y et y, quand ces cbes se croisent; et en partic. l'intégrale $\int y\,dx$ ne donne pas l'aire géométrique de la cbe $y=f(x)$, quand elle traverse l'axe des x. D'où désaccord entre l'analyse et la géométrie.

117. De même pour le volume compris entre 2 surfaces. La cubature des solides de révolution se ramène aux quadratures: $V = \pi \int y^2 dx$ dans cette intégrale peuvent figurer des valeurs imaginaires de y qui donneront des éléments réels de volume: nouveau désaccord.

118, 119. Problèmes sur la section de la sphère dans un rapport donné (Archimède). Il s'y introduit des racines qui valent non pour la sphère, mais pour le solide de révolution engendré par l'hyperbole équilatère qui lui est tangente.

Ch. XIV. Rectification des courbes; quadrature des surfaces de révolution

120. La formule $s=\int \sqrt{1+y'^2}\,dx$ tombe en défaut si y' devient imaginaire entre les limites de l'intégrale, ou si y' a deux valeurs ~~[illegible]~~ symétriques. Il faut corriger la formule pour la faire cadrer avec la définition géométrique de l'arc: par ex. prendre le radical avec le double signe, etc.

122. La quadrature des surfaces de révolution se ramène à une rectification:
$u = 2\pi \int y \sqrt{1+y'^2}\,dx$ — tombe en défaut si y' est imaginaire.

123. Centres de gravité définis géométriq.t par le calcul intégral.

124. Dans certains cas le lieu géom. d'un centre de gravité est transcendant et dans d'autres, algébrique; cela dépend de la forme accidentelle des équations qui traduisent les définitions géométriques.

158. Pour les problèmes du Calcul intégral, il faut de nouvelles synthèses (cf 114) pour lesquelles on doit examiner l'accord ou le désaccord de l'algèbre et de la géométrie.

Ch. XV. Des solutions de continuité. Des fonctions transcendantes.

125. Solutions de continuité de divers ordres, suivant que la fonction ou l'une de ses dérivées éprouve une solution de continuité propt dite.

126. Une fonction algébrique n'éprouve de solution de continuité qu'à l'infini. Une courbe correspondant tour à tour à 2 fonctions algébriques distinctes éprouve une solution de continuité au point de raccordement (car 2 fonctions algébriques ne peuvent avoir toutes leurs dérivées égales sans se confondre)

127. Les fonctions transcendantes admettent des solutions de continuité à distance finie

129. ~~Logarithmes~~; ~~leur~~ définition (des transcendantes) par intercalation, par séries, par intégration - Définition des logarithmes par intercalation indéfinie « C'est ainsi que des nombres, tels que l'exposant x de l'éq. $y = a^x$, employés primitivt dans la langue de l'algèbre, non comme mesure de grandeurs, mais comme nombres d'ordre ou comme indices d'opérations, peuvent être assimilés à des grandeurs et même à des grandeurs continues. » Logarithmes naturels, à base e (irrationnelle)

130. Solutions de continuité de la courbe: $y+1 = e^{-\frac{1}{x}}$

131. Séries convergentes. La propriété commutative des signes + et − ne subsiste pas; d'où différence avec les polynômes de l'algèbre

133. Certaines fonctions sont susceptibles de définitions algébriques et de définitions transcendantes (développement en série) qui peuvent ne pas cadrer entre elles (Désaccord entre l'algèbre et la logistique.)

134. Définition des fonctions transcendantes: e^x, $\cos x$, $\sin x$ au moyen des séries; d'où la formule: $\cos x + i \sin x = e^{xi}$ « Une telle relation n'a pas de sens, tant qu'on s'en tient à la définition ordinaire de la fonction exponentielle: car on ne sait ce que c'est que d'élever le nombre e à une puissance marquée par un exposant imaginaire ...; mais la relation acquiert un sens précis lorsque l'on

158. Les diverses définitions transcendantes impliquent la considération de la limite ou de l'infini.



définit la fonction e^x comme la somme d'une série convergente. «
Rien n'empêche en effet d'attribuer à la variable x ~~dans cette série~~ une valeur imaginaire dans chaque terme de cette série ... »

Ainsi des deux définitions transcendantes de la fonction exponentielle, l'une s'étend et l'autre ne s'étend pas aux valeurs imaginaires de la variable. De même pour les fonctions circulaires.

137. Définition du logarithme par l'intégrale : $y = \int_1^x \frac{k\,dx}{x}$

Pour $k = 1$, on a le logarithme naturel.

La courbe logarithmique : $x = \log y$ a sa soustangente constante :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{k}{y}.$$

cf §16. (Chasles)

139. Considérations sur la logistique ou calcul des grandeurs continues.

Ch. XVI. 140. « Sous le nom collectif de mathématiques on désigne un système de connaissances scientifiques .. fondées sur des notions qui se trouvent dans tous les esprits, portant sur des vérités rigoureuses que la raison est capable de découvrir sans le secours de l'expérience, et qui néanmoins peuvent toujours se confirmer par l'expérience, dans les limites d'approximation que l'expérience comporte » ~~Distinction~~

Ce double caractère distingue les mathématiques des sciences physiques et naturelles, d'une part, des sciences morales de l'autre. — On peut vérifier rigoureusement les vérités mathématiques portant sur les nombres, et approximativement celles qui portent sur des grandeurs continues. (distinction du dénombrement et de la mesure)

141. Le mode de vérification est le plus sûr critérium pour discerner à quelle science spéciale appartient telle proposition. Par ex. distinguer un théorème d'algèbre d'un théorème sur les nombres formulé en lettres (Binôme de Newton, selon que l'exposant est entier ou fractionnaire)

142. Vérification empirique du calcul des probabilités.

143. Les assertions ~~et théories~~ qui ne peuvent être soumises au contrôle de l'expérience ne sont pas proprement mathématiques, mais philosophiques. Par ex. le passage du commensurable à l'incommensurable, n'a rien de scientifique

De même, les théories des nombres négatifs, imaginaires, des quantités infinitésimales appartiennent à la φie des math. bien que tout géomètre soit obligé de les traiter; parce qu'on ne peut trancher ces questions ni par démonstration formelle ni par vérification expérimentale. Les règles du calcul sont certaines pour tous, de quelque façon que l'on comprenne ces règles et qu'on interprète les résultats.

144. Aussi la φie n'est-elle pas une science ~~dont~~ où l'on puisse décider définitivement des questions (cf. § 409 de l'Essai)

145 (cf. § 156 de l'Essai) « Au premier rang des questions philosophiques … se placent celles qui portent sur la valeur représentative des idées… L'algèbre n'est-elle qu'une langue conventionnelle ou bien est-ce une science ayant pour objets des rapports qui subsistent entre les choses, indépendamment de l'esprit qui les conçoit ? [Tout le calcul… de toute φie]

« Démontrer logiquement que certaines idées ne sont pas de pures fictions de l'esprit, n'est pas plus possible que de démontrer logiquement l'existence des corps; et cette double impossibilité n'arrête pas plus le progrès des mathématiques positives que ceux de la physique positive. Mais il y a cette différence, que la foi à l'existence des corps fait partie de notre constitution naturelle, est, comme on dit une croyance du sens commun, bien qu'au reste l'induction philosophique puisse venir au besoin à l'appui du sens commun; tandis qu'il faut se familiariser, par la culture des sciences, avec le sens et la valeur de ces idées spéculatives sur lesquelles on ne tomberait pas sans des études scientifiques. C'est ce qu'exprime le mot fameux attribué à D'Alembert. Allez en avant, et la foi vous viendra; non pas une foi aveugle machinale produit irréfléchi de l'habitude mais un acquiescement de l'esprit, fondé sur la perception simultanée d'un ensemble de rapports qui ne peuvent que successivement frapper l'attention du disciple et d'où résulte un faisceau d'inductions auxquelles la raison doit se rendre, en l'absence d'une démonstration logique que la nature des choses rend impossible »



146. La qté des math. consiste à choisir entre plusieurs ~~ordres~~ enchaînements également <u>logiques</u>, le plus <u>rationnel</u>, c.à.d. celui qui satisfait le mieux à la condition de faire ressortir l'ordre et les connexions des ~~vérités~~ propositions, telles qu'elles résultent de la nature des choses.

147. Les sciences déductives dont les principes ne peuvent être donnés que par l'expérience sont les sciences physico-mathématiques.

148. Le vague et l'indécision de la classification des parties des math. montrent que l'objet des math. existe hors de l'esprit humain et n'est pas un produit arbitraire de conventions (cf § 155 de l'Essai) L'enchevêtrement des rapports des diverses parties de la science échappe à toute représentation synoptique.

149. Enchaînement inattendu des idées math. les plus diverses, comme l'intervention de π dans la théorie des chances. Les math (<u>Poinsot</u>) ont pour objet 2 idées fondamentales ou catégories, l'ordre et la grandeur (cf Descartes, <u>Regulæ ad directionem ingenii</u> reg. IV.) Leibniz réduit la grandeur à l'ordre (<u>espace</u> = <u>ordre</u> des ph. sim. <u>temps</u> = ordre des ph. succ.)

150. Les spéculations les plus importantes en math. sont celles de grandeur ou de mesure. Aussi les philosophes qui ont cherché la raison dernière des choses dans le nombre ont-ils fait fausse route (cf § 199 de l'Essai) «La vraie physique a été fondée le jour où Galilée ... a conçu l'idée, non seulement d'interroger la nature, comme Bacon, ... mais de préciser la forme générale à donner aux expériences en leur assignant pour objet immédiat <u>la mesure</u> de tout ce qui peut être mesurable dans les phén. naturels.» De même Lavoisier a fondé la chimie sur la balance. Les parties des math. qui concernent la quantité pure étant les plus parfaites, on s'efforce de ramener les questions d'ordre, de situation ou de forme à des problèmes sur les grandeurs et les mesures (la <u>géométrie descriptive</u> à la Géom <u>dimensive</u>)

151. Distinction de l'analyse et de la synthèse en géométrie (cf. ch XVIII de l'Essai)

152. Méthode analytique, réduction en formules algébriques.

153. Ainsi des synthèses primordiales qui constituent les théorèmes de Thalès et de Pythagore on peut déduire analytiqt une foule de théorèmes; mais pour la mesure des aires, il faut une nouvelle synthèse, d'où l'on déduira par l'analyse toutes les propriétés métriques des figures (cf §§ 78, 114)

1

Cournot, Essai sur les fondements de nos connaissances (Hachette, 1851.)
(cf. De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie. Traité de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal)

Chapitre X : De l'espace et du temps.

140 — La mesure du temps repose sur un principe rationnel. Nous jugeons que le même phénomène doit se produire dans le même temps lorsque toutes les circonstances restent les mêmes à chaque reproduction du phénomène. — C'est une maxime posée a priori par la raison. Nous n'avons aucun moyen, dans les cas particuliers, de ~~nous assurer~~ constater avec une certitude parfaite la rigoureuse identité des circonstances. Ici intervient un jugement de la raison fondé sur les probabilités (Exemple : temps sidéral et temps solaire)

143 — Les difficultés qu'on éprouve à faire de l'espace et du temps des substances ou des attributs ~~ne~~ prouvent seulement que les catégories substantialistes ne répondent pas à la nature des choses.

144 — Le principe de l'inertie et le principe de la proportionnalité des forces aux vitesses font présumer la relativité de l'espace (Leibniz) car ils sont vérifiés par l'expérience. Un système en translation uniforme est indiscernable du même système au repos ; de même, l'indépendance des effets des forces, que les corps soient en repos ou en mouvement montre qu'il n'y a ni mouvement ni espace absolus.
(Laplace, Exposition du système du monde, III, 2.
D'Alembert : Traité de dynamique
Poisson : Traité de mécanique I, 116.)

Chapitre XI : des idées mathématiques ; des idées de genre et d'espèce.

149,150. Distinction des abstractions rationnelles (qui correspondent à des faits généraux ou à des lois) et des abstractions logiques (artificielles)

153. Les idées mathématiques sont des abstractions rationnelles. Mais l'application des nombres à la mesure ou à l'expression des grandeurs



continues est sans nul doute un artifice de notre esprit, dû tient pas essentiellement à la nature de ces grandeurs. Encore, les nombres n'existent pas dans la nature; et pourtant les propriétés des nombres correspondent à certains rapports généraux entre les choses, à certaines lois ou conditions générales des phénomènes.

154 – Les idées mathématiques ne sont que des formes particulières et en quelque sorte des espèces concrètes d'idées encore plus abstraites et plus générales : idées de combinaison, d'ordre, de symétrie, d'égalité, d'inclusion et d'exclusion, etc. qui trouvent leur application hors des mathématiques.

155. La complexité des mathématiques et l'entrelacement de leurs parties prouvent qu'elles ne sont pas un produit de l'esprit et qu'elles ont leur raison d'être dans la nature des choses. « Ceci accuse une complication et un enchevêtrement de rapports, rebelles à nos procédés logiques de définition, de division et de classification, & rien ne montre mieux que l'objet des mathématiques existe hors de l'esprit humain, et indépendamment des lois qui gouvernent notre intelligence. »

156. « Tout le calcul des valeurs négatives, imaginaires, infinitésimales n'est-il que le résultat de règles admises par conventions arbitraires, ou toutes ces prétendues conventions ne sont-elles que l'expression nécessaire de rapports que l'esprit est certainement obligé (attendu leur nature idéale et purement intellectuelle) de représenter par des signes de forme arbitraire, mais qu'il n'invente point au gré de son caprice ou par la seule nécessité de sa propre nature, et qu'il se borne à saisir tels que la nature des choses les lui offre, en vertu de la faculté de généraliser et d'abstraire qui lui a été départie? Voilà ce qui partage les géomètres en sectes, voilà le fond de la philosophie des mathématiques comme de toute philosophie. »

Ch. XII : Des idées morales et esthétiques.

174 – Un objet nous plaît-il parce qu'il est beau, en lui-même et essentiellement, et parce que nous tenons de la nature le don de percevoir cette qualité des choses extérieures et de nous y complaire ; ou bien le qualifions-nous de beau parce qu'il nous plaît, sans qu'il y ait d'autre fondement à l'idée de beauté que le plaisir même que l'objet nous cause, en vertu des lois constantes de notre organisation, ou des modifications accidentelles qu'elle a pu subir ? Telle est la face sous laquelle se présente en esthétique le problème qui se reproduit partout, et qui consiste à faire la part du sujet sentant ou percevant et de l'objet perçu ou senti, dans l'acte qui les met en rapport l'un avec l'autre et d'où résulte un sentiment ou une perception.

175 – Les idées du bon et de l'utile sont relatives à notre nature et à nos besoins ...... Mais à l'inverse, puisque la beauté des œuvres de l'homme ne nous apparaît que comme un reflet et une image affaiblie des beautés cosmiques, il y a lieu d'en induire que l'idée du beau ne tire pas son origine de convenances purement humaines : et de même qu'en voyant le monde soumis à des lois géométriques nous en inférons que les idées et les rapports géométriques subsistent indépendamment de l'esprit qui les conçoit et ne doivent pas être rangés parmi les abstractions artificielles et arbitraires, mais parmi les principes rationnels des choses ; de même les beautés répandues à profusion dans l'ensemble et dans les détails du monde doivent nous porter à croire que les principes et la raison du beau ne tiennent pas aux particularités de l'organisation de l'homme, et sont d'un ordre bien supérieur à l'ordre des faits purement humains.

§ 177 : Le type idéal ne peut être le type moyen (ex : triangles rectangles)



4

181. – Conditions de la beauté d'un vase : il faut : 1° que sa forme annonce clairement l'usage auquel il doit être approprié, lors même qu'en réalité il ne devrait servir que d'ornement et comme simulacre de la chose plutôt que comme la chose même ; 2° que les conditions physiques résultant de ce même usage, par exemple les conditions de stabilité, soient évidemment satisfaites ; 3° que la subordination des parties accessoires aux parties principales ressorte nettement de leur mode d'association et de leurs dimensions relatives ; 4° ~~quentre~~ qu'entre les divers rapports propres à satisfaire aux conditions précédentes on choisisse de préférence les rapports les plus simples qui plaisent davantage, non-seulement parce que notre esprit les saisit mieux, mais parce que la raison est choquée d'une complication inutile, en vertu du même principe qui fait qu'elle s'offense d'un défaut de symétrie là où il n'y a aucune raison intrinsèque pour que la symétrie soit troublée, et parce que cette manière de voir de l'esprit humain trouve sans cesse sa confirmation dans l'étude des phénomènes et des lois de la nature.

(Ziegler, Etudes céramiques, Paris, 1850)

Cournot ~~pense~~ que ces conditions fixent seulement un certain nombre de points du contour, qui reste à déterminer par le goût de l'artiste ; deux extrêmes à éviter dans ce tracé arbitraire : le style roide ou sec, le style maniéré ou contourné. L'art commence par la roideur et finit par le maniéré.

182. – Autre chose est le sentiment que nous avons du beau (goût intellectuel) autre chose est le plaisir ou l'émotion agréable que le spectacle du beau nous procure.

Cournot Chap XIII : de la continuité et de la discontinuité.

184 — Le nombre est conçu comme une collection d'unités distinctes : c'est à dire que l'idée de nombre implique à la fois la notion de l'individualité d'un objet, de la connexion ou de la continuité de ses parties (s'il a des parties), et celle de la séparation ou de la discontinuité des objets individuels.

Grandeurs discrètes ou discontinues. — Les grandeurs continues ne passent pas d'un état à un autre, si voisin qu'on le suppose sans avoir traversé une infinité d'états intermédiaires.

185 — Telles sont essentiellement les grandeurs géométriques & mécaniques. On a renoncé aux forces discontinues pour expliquer les chocs.

Il y a une probabilité philosophique à admettre qu'il y a pas discontinuité de densité entre deux milieux différents, et par suite que la trajectoire du rayon lumineux qui les traverse est courbe et non brisée.

186. Les grandeurs continues et mesurables sont appelées quantités. L'idée de quantité est construite au moyen de deux idées vraiment irréductibles et fondamentales, l'idée de nombre et l'idée de grandeur. Non seulement l'idée de quantité n'est point primordiale mais elle implique quelque chose d'artificiel. Les nombres sont dans la nature, c.à.d. subsistent indépendamment de l'esprit qui les observe ou les conçoit : car une fleur a quatre, cinq ou six étamines, sans intermédiaire possible, que nous nous soyons ou non avisés de les compter. Les grandeurs continues sont pareillement dans la nature ; mais les quantités n'apparaissent qu'en vertu du choix artificiel de l'unité, et à cause du besoin que nous éprouvons (par suite de la constitution de notre esprit) de recourir aux nombres pour l'expression des grandeurs (153.)

D'où deux sens du mot unité, opposés l'un à l'autre.



Distinction de la quantité et de la quotité (nombre)

187. Il y a des choses susceptibles d'augmenter et de diminuer d'une manière continue, qui ne sont pas des quantités (ex. sensations affectives)

188. Sans doute la variation continue d'intensité, dans une sensation de douleur ou de plaisir, peut se lier à la variation continue de certaines grandeurs mesurables, et dépendre de la continuité inhérente à l'étendue et à la durée ..... mais cette correspondance ou cette relation n'a rien de mathématique, puisque l'attribut de grandeur mesurable qui appartient à l'aire de la section transversale (d'un cordon nerveux) n'appartient pas à la sensation.

Puisque la vitesse de vibration d'un corps sonore ou celle de l'éther sont des grandeurs mesurables et continues, on voit une raison suffisante pour que le passage de la sensation d'un ton à celle d'un autre ton, de la sensation d'une couleur à celle d'une autre couleur se fasse avec continuité; mais il n'y a pas pour cela entre les diverses sensations de tons et de couleurs des rapports numériques assignables, comme il y en a entre les vitesses de vibration qui leur correspondent. La sensation du son sol n'équivaut pas à une fois et demie la sensation du ton ut .... La sensation de l'orangé n'est pas les cinq septièmes .... de la sensation du violet ....

La continuité dans la variation d'intensité d'une force d'attention ou d'un appétit sensuel s'expliquera bien par la continuité dans la variation de certaines grandeurs physiques et mesurables, telles que la vitesse et l'abondance du sang, la charge électrique ou la température de certains organes ..... mais il se faut pas conclure que l'attribut de grandeur mesurable appartienne à ces mêmes forces vitales ....

189: La continuité de l'espace et du temps suffit pour rendre raison de la continuité des phénomènes physiques et même psychiques.

192: La ressemblance et la dissemblance se relient par des degrés continus, sans qu'on puisse, sinon arbitrairement, fixer le point où cesse la ressemblance, où commence la dissemblance.

195 – Une classification vraiment naturelle, et même toute classification dans ce qu'elle a de naturel, ne peut être que l'expression des affinités qui lient entre eux les êtres organisés, et des lois auxquelles la nature s'astreint en variant et en modifiant les types organiques: lois qui subsistent indépendamment de nos méthodes et de nos procédés artificiels, tout comme les lois qui régissent les mouvements de la matière inerte....

– Il y a mélange des deux sortes d'abstraction (ch XI) et transition continue de l'une à l'autre.

196. – Continuité dans le monde moral: « L'abus de la logique et de la casuistique, en politique comme en morale, consiste à ne pas tenir compte de la continuité des transitions, et à vouloir appliquer la rigueur des définitions, des formules et des déductions logiques à des choses qui y répugnent en raison de cette continuité même » Cournot oppose « le bon sens pratique » aux systèmes absolus de ces esprits dont le tort n'est pas de faire de la théorie, mais une fausse théorie, et qui croient se servir de la logique quand ils ne font qu'en abuser en l'appliquant à des choses auxquelles il est impossible qu'elle s'adapte »

197 – Par une loi générale de la nature, la continuité est la règle et la discontinuité l'exception..... Si ce fait capital a été méconnu..... il faut l'imputer à la nature des signes qui sont pour nous les instruments indispensables du travail de la pensée.



C'est pour avoir méconnu cette loi de l'esprit humain que

199. — Les philosophes depuis Pythagore jusqu'à Kepler, ont vainement cherché l'explication des phénomènes cosmiques dans ~~l'idée~~ des idées d'harmonie, mystérieusement rattachées à certaines propriétés des nombres considérés en eux-mêmes, et indépendamment de l'application qu'on en peut faire à la mesure des grandeurs continues.

200. Les trois grandes innovations qui ont successivement étendu pour les modernes, le domaine du calcul, à savoir, le système de la numération décimale, la théorie des courbes de Descartes et l'algorithme infinitésimal de Leibniz, ne sont au fond que trois grands pas faits dans le but d'appliquer des signes conventionnels à l'expression des rapports mathématiques régis par la loi de continuité.

201 : Transformation de l'algèbre en analyse par Descartes : les symboles algébriques, originairement destinés à représenter des nombres ou des quantités discrètes (et fixes, à l'état stationnaire) se trouvaient ainsi appropriés à la représentation de la loi des variations continues d'une grandeur dépendantes des variations d'une autre. — La relation entre les variations élémentaires et infiniment petites de diverses grandeurs dépendant les unes des autres contient la vraie raison de la marche suivant laquelle varient ces mêmes grandeurs, telles que nous pouvons les observer au bout d'un intervalle fini. De là le calcul infinitésimal, dont la vertu propre est de saisir directement le fait de la continuité dans la variation des grandeurs, lequel est par conséquent accommodé à la nature des choses, mais non à la manière de procéder de l'esprit humain, pour qui il n'y a de sensibles et de directement saisissables que des variations finies.

Exemples : refroidissement ; chute d'un corps ($gt^2/2$ vient de gt)

De cette relation si simple entre les éléments du temps écoulé et de l'espace décrit dérive... la loi moins simple qui lie l'une à l'autre les variations finies de ces deux grandeurs —

(Aussi Cournot, dans sa Théorie des fonctions,[1] livre I, chap. IV, trouve que la fonction primitive dérive réellement de sa dérivée)

« C'est en ce sens qu'on a pu dire avec fondement que les infiniment petits existent dans la Nature : non que des grandeurs infiniment petites puissent en aucune façon tomber dans le domaine de l'imagination ou de la perception sensible, mais parce que la notion abstraite et purement intellectuelle de l'élément infinitésimal, loin d'être une abstraction d'origine artificielle, accommodée à l'organisation de l'esprit humain, à notre manière de concevoir et d'imaginer les choses, y est plutôt opposée, tandis qu'elle s'adapte directement au mode de génération des phénomènes naturels et à l'expression de la loi de continuité qui les régit. »



Chapitre XV : des définitions –

234, note – Il ne faut que de médiocres connaissances en géométrie élémentaire, et un peu de réflexion, pour se convaincre que l'imperfection de la théorie des parallèles (pour employer le mot consacré) tient au refus d'admettre comme notion naturelle et primitive la notion de la similitude, ou l'idée qu'une figure étant donnée, on peut toujours en imaginer une autre qui ne diffère de la figure primitive que parce qu'on a changé l'échelle de construction, ou parce que toutes les lignes de la figure ont crû ou décrû proportionnellement. De cette notion primitive (dont il serait chimérique de chercher une démonstration prétendue analytique, comme celle qu'a voulu donner Legendre dans une note jointe à ses Eléments de géométrie) résulte immédiatement que les triangles équiangles ont leurs côtés correspondants proportionnels, ou réciproquement ; et cette proposition une fois admise, il n'est plus

(1) « Le rapport entre les variations élémentaires de la chaleur et du temps est la raison du rapport qui s'établit entre les variations de ces mêmes grandeurs quand elles ont acquis des valeurs finies. » (Théorie des infiniment petits) et § 201 du présent Essai.

besoin, dans la théorie des parallèles, du fameux <u>postulatum</u> d'Euclide ni d'aucun autre qui en tienne lieu......

Chapitre <u>XVI</u>. De l'ordre linéaire du discours. Du syllogisme

247.– Distinction de l'ordre rationnel et de l'ordre logique. Celui-ci est l'ordre de démonstration des vérités mathématiques; celui-là est leur ordre d'<u>invention</u> (cf §156: on ne peut démontrer <u>logiquement</u> que tel est bien l'ordre <u>rationnel</u>; que certaines idées ne sont point de pures fictions de l'esprit; ~~est~~ cela relève du sens philosophique et de la probabilité.)

251.– Bien que l'espèce ne soit pas contenue dans le genre de la même manière qu'une grandeur est contenue dans une autre, il y a pourtant des principes d'une généralité telle, qu'ils s'appliquent à l'un comme à l'autre mode de compréhension ou d'extension.... Les règles de synthèse combinatoire, appropriées à la série syllogistique, doivent donc avoir la plus grande ressemblance avec les règles du <u>calcul des inégalités</u>. ......Mais le calcul des inégalités, comparé à celui des équations repose sur des principes moins simples et sujets à plus de restrictions; aussi est-il resté à un état qu'on peut qualifier de rudimentaire par comparaison avec les vastes développements qu'a pris la théorie des équations algébriques.– Par une raison semblable, la théorie du syllogisme ne comporterait en aucune façon des développements scientifiques comparables à ceux de l'algèbre, quand même elle ne serait pas d'une utilité pratique aussi restreinte, que les applications de l'algèbre sont nombreuses et importantes.

252. Tous les raisonnements peuvent-ils se ramener au syllogisme? Aristote lui-même ne le pensait pas, et il faisait déjà remarquer que les géomètres n'emploient pas le syllogisme, parce que, suivant lui, ils ne font point usage des notions de genre et d'espèce. Mais il y a une meilleure raison pour cela: car, comment établir par syllogismes

la théorie des combinaisons puisque les règles mêmes de l'argumentation syllogistique relèvent de la théorie des combinaisons? Et comment faire dépendre d'un syllogisme les règles du calcul algébrique, puisque la liaison de la conséquence aux prémisses dans le syllogisme n'a ni plus ni moins d'évidence que les règles du calcul algébrique?

(plutôt moins, L. C.)

Chapitre ~~XVIII~~. De l'analyse et de la synthèse.

264. – Les résultats d'un calcul sont implicitement contenus dans les données du calcul; mais il faut souvent une rare sagacité pour les en tirer, et un talent distingué pour écrire la langue du calcul, comme toute autre langue, avec l'élégance et la simplicité qu'elle comporte.

258. – On a dit que l'analyse est la méthode d'invention, et la synthèse la méthode d'exposition. Le fait est qu'il n'y a pas de méthode d'invention, et qu'on ne doit pas considérer, qu'on ne considère pas effectivement comme inventeur celui qui ne fait qu'appliquer une méthode.

266. Démonstration du principe d'Archimède par le principe de raison suffisante.



Ch. XXV : Résumé.

409. Il est de l'essence des choses que la vérité philosophique ne puisse pas être, à la manière d'un fait positif, mise par l'expérience hors de toute contestation, ni être catégoriquement démontrée par le raisonnement, par le calcul, par la réduction à l'absurde, à la manière des vérités abstraites qui sont l'objet des sciences qu'on appelle exactes. Après que les sciences se sont enrichies de faits positifs en assez grand nombre, l'assentiment des bons esprits peut faire prévaloir une idée, une conception philosophique qui place ces faits dans un ordre plus lumineux, qui rende mieux compte de leurs connexions et de leur dépendance ; mais l'idée même n'est point un fait qui tombe dans le domaine de l'expérience sensible, un résultat que le calcul puisse manifester, ou un théorème susceptible de démonstration catégorique. On la propose et parfois on la fait accueillir, mais on ne l'impose point. La probabilité philosophique, à quelque degré qu'elle soit portée, n'exclut jamais la contradiction paradoxale ou sophistique. On ne peut pas plus mesurer cette probabilité qu'on ne peut exprimer numériquement le degré de ressemblance entre les rapports intelligibles des choses et l'idée que nous avons de ces rapports, entre cette idée intérieure et l'expression que nous tâchons d'en donner à l'aide des signes du langage et des autres formes sensibles dont nous essayons de la revêtir. Le sentiment du vrai en philosophie n'est, pas plus que le sentiment du beau dans les arts, susceptible de décomposition ou d'analyse rigoureuse ; et le renversement du bon sens, comme la perversion du goût, ne constitue pas à proprement parler, une erreur réfutable.


ECOLE NORMALE SUPERIEURE

Cantor.

Théorie des ensembles.

Cantor.

Georg Cantor. — Acta mathematica, tome II.

Théorie des ensembles.

D. §1. Les nombres rationnels servent de fondement pour arriver à la notion plus étendue d'une grandeur numérique; je les désignerai sous le nom de système A, en y comprenant zéro. D

On rencontre une première généralisation de la ~~idée de nombre~~ notion de grandeur numérique dans le cas où l'on a obtenu par une loi, une suite infinie de nombres rationnels:

(1) $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$

constituée de telle sorte que la différence $(a_{n+m} - a_n)$ devient infiniment petite à mesure que n croît, quel que soit le nombre entier positif m, en d'autres termes, qu'à tout nombre ~~entier~~ rationnel positif ε correspond un nombre entier n_1 tel que l'on ait:

$$|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$$

si: $n \geq n_1$, m étant un nombre entier positif quelconque.

J'exprime cette propriété de la série (1) en disant qu'elle a une limite déterminée b. — Ce terme et cette lettre ne représentent rien de plus que la propriété précédente de la série (1).

Soit une seconde série:

(1') $a'_1, a'_2, \dots a'_n \dots$

ayant une limite déterminée b'; les deux séries (1) et (1') ont toujours une des trois relations suivantes, qui s'excluent:

1° $(a_n - a'_n)$ devient infiniment petit à mesure que n croît;

2° $(a_n - a'_n)$ à partir d'un certain rang n reste toujours plus grand qu'un nombre rationnel positif ε;

3° $(a_n - a'_n)$ à partir d'un certain rang n reste toujours plus petit qu'un nombre rationnel négatif $-\varepsilon$.



Dans le 1er cas je pose : $b = b'$
dans le 2e : $b > b'$
dans le 3e : $b < b'$.

De même, une série (1) ayant ~~une~~ limite b n'a avec un nombre rationnel a qu'une des trois relations suivantes :

1° $(a_n - a)$ devient infiniment petit à ~~ave~~ mesure que n augmente ;

2° $(a_n - a)$ à partir d'un certain rang n reste toujours plus grand qu'un nombre rationnel positif ε ;

3° $(a_n - a)$ à partir d'un certain rang n reste toujours plus petit qu'un nombre rationnel négatif $-\varepsilon$

Pour exprimer l'existence de ces rapports, j'écris respectivement :

$$b = a, \qquad b > a, \qquad b < a$$

Donc, b étant la limite de la série (1), $(b - a_n)$ devient infiniment petit à mesure que n croît, ce qui justifie d'une manière précise le nom de « limite de la série (1) » donné à b.

Désignons par B l'ensemble des grandeurs numériques b. On peut étendre les opérations élémentaires définies pour les nombres rationnels aux deux ensembles A et B réunis....

En général, toute équation obtenue par un nombre fini d'opérations élémentaires :

$$F(b, b', b'', .. b^{(\nu)}) = 0$$

représente une relation déterminée entre les séries qui donnent naissance aux grandeurs numériques $b, b', b'', \ldots b^{(\nu)}$

Quand on dit, par exemple, qu'une équation algébrique à coefficients entiers :

$$f(x) = 0$$

a une racine réelle ω, cela signifie qu'on a ~~une~~ une suite rationnelle :

$$a_1, a_2, \ldots . a_n \ldots .$$

qui a pour limite le signe ω, et qui jouit de cette propriété :

$$\lim_{n=\infty} f(a_n) = 0$$

Les deux ensembles A et B réunis donnent naissance par le même procédé, à un nouvel ensemble C.

Soit en effet une suite infinie :

(2) $b_1, b_2, \ldots\ldots b_n, \ldots\ldots$

de nombres choisis dans les systèmes A et B et n'appartenant pas tous au système A, cette série étant constituée de telle sorte que $(b_{n+m} - b_n)$ devient infiniment petit à mesure que n croît, quel que soit l'entier m; je dirai que cette suite a une limite déterminée c. — Les grandeurs numériques c constituent l'ensemble C.

Tandis que les systèmes A et B sont tels qu'on peut égaler chacun des a à un b, mais non pas chacun des b à un a, on peut au contraire égaler, non seulement chacun des b à un c, mais aussi chacun des c à un b.

Bien que par là les systèmes B et C puissent être regardés comme identiques, il est essentiel de maintenir la distinction abstraite entre les deux systèmes B et C; aussi bien l'équivalence de deux grandeurs numériques b, b' empruntées au système B n'entraîne pas leur identité, mais exprime seulement une relation déterminée entre les séries auxquelles elles se rapportent.

Le système C joint à ceux qui le précèdent produit d'une manière analogue un système D, celui-ci à son tour un système E, et ainsi de suite; par λ de ces opérations, on arrive à un système L de grandeurs numériques. — Tous les systèmes B, C, D, E, ... L (en nombre λ) peuvent être considérés comme identiques.

On dira d'une grandeur numérique du système L : C'est une grandeur numérique, une valeur, ou une limite de λ^e espèce; d'où l'on voit que j'emploie en général les mots gr. n. val. et lim. dans le même sens.



Une équation : $F(l, l', l'', \ldots l^{(m)}) = 0$
formée de nombres $l, l', l'', \ldots l^{p}$ de l'ensemble Σ au moyen d'un nombre fini d'opérations élémentaires est l'expression d'une relation déterminée entre $(p+1)$ suites λ fois infinies de nombres rationnels.

Application à la ligne droite (cf. 10e livre de Euclide)

§2. Les points d'une ligne droite sont déterminés quand, en prenant pour base une unité de mesure, on indique leurs distances (abscisses) d'un point fixe O de la ligne droite, avec le signe + ou le signe −.
— Si cette distance a avec l'unité de mesure un rapport rationnel, elle est exprimée par un nombre rationnel, c.à.d. par une grandeur numérique de l'ensemble A. Dans le cas contraire, si le point est connu par une construction, on peut toujours imaginer une ~~série~~ suite

(1) $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

réalisant les conditions énoncées §1, et ayant avec la distance en question une relation telle, que les points de la droite auxquels se rapportent les distances $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ se rapprochent à l'infini du point à déterminer, à mesure que n augmente.

On exprime ce fait en disant : La distance au point O du point à déterminer est égale à b, b étant la limite de la série (1.

On démontre ensuite que les conditions d'équivalence et d'inégalité ~~entre~~ de distances connues concordent avec les conditions d'équivalence et d'inégalité des grandeurs numériques correspondantes (définies §1.) Les grandeurs numériques des ensembles B, C, D, ... sont donc capables de représenter des distances connues. Pour achever la correspondance, il faut ajouter un axiome que voici : « A chaque grandeur numérique répond, réciproquement, un point déterminé de la ligne droite, dont l'abscisse est mesurée par cette grandeur numérique ».

On peut donc considérer les différentes grandeurs numériques comme correspondant une à une aux différents points d'une droite et inversement. Cela permet de représenter un système de valeurs par un système de points sur une droite.

Étant donné sur une droite un système de points P, j'appelle point-limite de ce système un point de la droite tel que dans son voisinage il y ait un nombre infini de points du système P. J'appelle voisinage d'un point tout intervalle dans lequel ce point est contenu.

Un système composé d'un nombre infini de points dans un intervalle fini a au moins un point-limite.

On appelle premier système dérivé de P l'ensemble de ses points-limites. Un point limite de P peut ne pas appartenir à P.

On appelle point isolé de P tout point qui, appartenant à P, n'est pas en même temps point-limite de P.

Soit P' le premier dérivé de P; s'il n'est pas composé d'un nombre fini de points, il engendre un dérivé P'' qu'on nomme le second système dérivé de P; et ainsi de suite, tant que les ensembles dérivés successifs comprennent un nombre infini de points. Tous les points de P'', P''', etc. font partie du premier dérivé P', mais tout point de P' n'appartient pas nécessairement à P.

Exemple: Si le système P se compose de tous les points à abscisse rationnelle compris entre 0 et 1 (inclus ou exclus), le dérivé P' contiendra tous les points (rationnels et irrationnels) de l'intervalle (0, 1) y compris les 2 points 0 et 1. Les dérivés suivants sont identiques à P'.

Exemple: Si le système P est composé des points dont les abscisses sont:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots$$

le dérivé P' se réduit au point-limite 0 et n'engendre pas de dérivé.



E. Il peut se faire que la suite des dérivés P', P'', ... aboutisse à un dérivé $P^{(n)}$ composé de points qui ne se présentent qu'en nombre fini dans chaque intervalle fini, en sorte que $P^{(n)}$ n'a pas de points-limites et par conséquent ne donne lieu à aucun dérivé. Dans ce cas nous disons que l'ensemble P est du premier genre et de la n^e espèce.

Mais si la suite des dérivés de P est infinie, nous disons que l'ensemble P est du deuxième genre.

Il s'ensuit que si P est du premier genre et de la n^e espèce P', P'', P''', ... sont aussi du premier genre et respectivement de la $(n-1)^e$, de la $(n-2)^e$, de la $(n-3)^e$ ..... espèce.

Si au contraire P est du deuxième genre, tous ses dérivés sont du même genre.

Nous dirons qu'un ensemble P est condensé dans tout l'intervalle (α, β) lorsque chaque intervalle (γ, δ), compris dans l'intervalle (α, β), si petit qu'il soit contient des points de l'ensemble P.

Exemples: Ensemble des points de l'intervalle (α, β) dont les abscisses sont des nombres rationnels; Ensemble des points qui ont pour abscisses les nombres rationnels de la forme: $\pm \frac{2n+1}{2^m}$, (n et m entiers positifs.)

De ce que P est condensé dans tout le intervalle (α, β) il résulte que son dérivé P' est condensé dans le même intervalle, et comprend tous les points de cet intervalle.

Un système de points condensé dans un intervalle quelconque est nécessairement du deuxième genre: car tous ses dérivés successifs sont aussi condensés dans cet intervalle, et par conséquent leur suite est illimitée.

Donc un ensemble du premier genre ne peut être condensé dans aucun intervalle, si petit qu'il soit.

On peut aussi classer les ensembles d'après leurs puissances.

B. — Si l'on peut faire correspondre élément par élément deux ensembles bien définis (1) M et N par une opération à sens unique nous dirons que ces ensembles ont même puissance ou encore qu'ils sont équivalents. B

Nous appellerons parties intégrantes d'un ensemble M tous les autres ensembles dont tous les éléments sont des éléments de M.

Si deux ensembles M et N n'ont pas la même puissance, ou bien M aura la même puissance qu'une partie intégrante de N, ou bien N aura la même puissance qu'une partie intégrante de M. Dans le 1er cas, on dit que la puissance de M est plus petite, dans le 2e cas qu'elle est plus grande que la puissance de N.

Quand les ensembles à considérer sont finis, c.à.d. composés d'un nombre fini d'éléments, la notion de la puissance se réduit à celle de nombre entier positif.

Une partie intégrante d'un ensemble fini a toujours une puissance plus petite que cet ensemble. Cela n'a plus lieu dans les ensembles infinis, c.à.d. composés d'un nombre infini d'éléments. — Par exemple, soit M la suite des nombres entiers positifs n, N la suite des nombres pairs $2n$; N est alors une partie intégrante de M, et néanmoins M et N ont la même puissance.

G

(1) G. Je dis qu'un ensemble d'éléments (appartenant à une sphère abstraite qcque) est bien défini quand on peut le considérer déterminé de telle façon que : 1° un objet qcque appartenant à cette sphère étant choisi, on puisse regarder comme intrinsèquement déterminé s'il appartient ou non à l'ensemble en question ; 2° deux objets appartenant à l'ensemble étant donnés, on puisse regarder comme intrinsèquement déterminé s'ils sont égaux ou non, malgré les différences qui peuvent se présenter dans la manière dont ils sont donnés. — Il se peut que l'on ne puisse tirer de cette détermination intrinsèque une détermination extrinsèque avec les méthodes dont on dispose. Exemples : e et π sont-ils algébriques ? Cf. Hermite sur la fonction exponentielle (1874.)



E. On peut encore dire que deux ensembles M et N ont la même puissance, quand on peut les faire correspondre entre eux par une loi déterminée, de manière qu'à chaque élément de M corresponde un élément de N et qu'à chaque élément de N corresponde un élément de M.

Suivant que deux ensembles sont de même puissance ou non, on les placera dans une même classe ou dans des classes différentes; on pourra de plus ranger ces classes par ordre de puissances croissantes. Chaque système de points peut être considéré comme représentant la classe à laquelle il appartient.

G. La théorie des ensembles, ainsi conçue, comprend l'arithmétique, la théorie des fonctions et la géométrie; ces parties de la science sont ~~trouvent~~ ainsi ramenées à l'unité, grâce à la notion de puissance, qui comprend comme cas particulier celle de nombre entier. Le continu et le discontinu sont ainsi considérés au même point de vue, et se trouvent ramenés à une commune mesure.

La plus petite puissance que l'on puisse trouver dans les ensembles infinis est la puissance de la suite des nombres entiers positifs; j'appelle ensembles dénombrables les ensembles qui ont la même puissance que cette suite; ils forment la première classe d'ensembles. Ce qui les caractérise, c'est qu'on peut les mettre sous la forme d'une suite régulière simplement infinie: $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n, \dots$ en sorte que chaque élément de l'ensemble considéré occupe une place déterminée dans cette suite, et que tout terme de cette suite soit un élément de l'ensemble considéré.

B. Théorèmes: — Chaque partie intégrante infinie d'un ensemble de la première classe a la même puissance, c.à.d. la première.
— Étant donnée une suite finie ou simplement infinie (dénombrable) d'ensembles $E_1, E_2, E_3, \dots$ de la première puissance, l'ensemble E formé par leur réunion a aussi la première puissance (est dénombrable)
(Corollaire: Les suites infinies à multiple entrée forment des ensembles dénombrables)

Ces deux propositions simples et faciles à prouver servent de base à l'étude des ensembles dénombrables.

F. Notations : Identité de deux ensembles : $P \equiv Q$. F

Si deux ensembles P et Q n'ont aucun élément (point) commun, on dit qu'ils sont sans connexion.

Si un système P est formé de la réunion de plusieurs ensembles $P_1, P_2, P_3, \ldots$ en nombre fini ou infini, n'ayant deux à deux aucune connexion, nous écrirons :

$$P \equiv P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$$

Si tous les points d'un ensemble Q appartiennent à un autre ensemble P, on dit que Q est contenu dans P, ou encore que Q est un diviseur de P et P un multiple de Q.

Soient $P_1, P_2, P_3, \ldots$ des ensembles de points en nombre fini ou infini ; leur plus petit commun multiple, que nous désignons par :

$$\mathfrak{M}(P_1, P_2, P_3, \ldots)$$

est l'ensemble composé de tous les points différents appartenant aux ensembles $P_1, P_2, P_3, \ldots$. Leur plus grand commun diviseur, que nous désignons par :
$$\mathfrak{D}(P_1, P_2, P_3, \ldots)$$
est l'ensemble des points communs à tous les ensembles $P_1, P_2, P_3, \ldots$

Ainsi, $P', P'', P''', \ldots$ étant les dérivés successifs d'un ensemble P, P'' est diviseur de P', P''' de P'' et de P', etc. chaque dérivé divise tous les dérivés précédents ; mais en général P' n'est pas diviseur de P.

Il est utile d'avoir un signe qui exprime l'absence de points : nous choisirons pour cela la lettre O ; ainsi : $P \equiv O$ signifie que le système P ne contient aucun point, c.à.d. n'est pas à proprement parler un ensemble de points. — Par exemple un système



de points du premier genre et de la n^e espèce est caractérisé par l'égalité :

$$P^{(n+1)} \equiv 0$$

au contraire, $P^{(n)}$ est différent de zéro.

Deux systèmes sont en connexion par leur plus grand commun diviseur. Si celui-ci est nul ($\equiv 0$), ils sont sans connexion.

Si deux systèmes P et Q ont même puissance, et par conséquent appartiennent à la même classe, nous les appelons équivalents, et nous exprimons cette relation par la formule :

$$P \sim Q$$

De : $P \sim Q$, $Q \sim R$, on peut conclure : $P \sim R$.

Soient $P_1, P_2, P_3, \ldots$ une suite de systèmes n'ayant entre eux aucune connexion ; $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ une autre suite dans les mêmes conditions. Des relations :

$$P_1 \sim Q_1, \quad P_2 \sim Q_2, \quad P_3 \sim Q_3, \ldots\ldots$$

on peut conclure :

$$P_1 + P_2 + P_3 + \ldots\ldots \sim Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots\ldots$$

H. Si Q est un ensemble contenu dans P, et R le système qui reste quand on supprime dans P tous les points de Q, on peut écrire :

$$P \equiv Q + R \qquad \text{et :} \qquad R \equiv P - Q.$$

Si un système de points Q est tel qu'aucun de ses points ne soit en même temps un point-limite, on l'appelle ensemble isolé.

Cela revient à dire que cet ensemble Q et son dérivé Q' sont sans connexion, ce qui s'écrit :

$$\mathfrak{D}(Q, Q') \equiv 0.$$

Étant donné un système quelconque de points P, on peut en tirer un ensemble isolé Q en enlevant de l'ensemble P l'ensemble $\mathfrak{D}(P, P')$. On a donc :

$$Q \equiv P - \mathfrak{D}(P, P')$$

ou :

$$P \equiv Q + \mathfrak{D}(P, P')$$

Donc tout ensemble de points P est composé d'un ensemble isolé Q, et d'un autre ensemble R qui est diviseur du premier dérivé P'. Et comme tous les dérivés suivants sont contenus dans les dérivés qui précèdent, il s'ensuit que tous les systèmes :

$$P'-P'',\quad P''-P''',\ \ldots\ldots\quad P^{(n)}-P^{(n+1)},\ \ldots$$

sont des ensembles isolés. (se démontre par le théorème géométrique de la page 23.)

Théorèmes. Tout ensemble de points isolé est dénombrable.

Si le dérivé P' d'un ensemble P est dénombrable, l'ensemble P est aussi dénombrable. (corollaire de : $P \equiv Q + \mathfrak{D}(P, P')$ et du précédent.)

Tout ensemble du premier genre et de la ν^e espèce est dénombrable.

E. Ainsi tous les ensembles du premier genre appartiennent à la première classe. Mais beaucoup d'ensembles du deuxième genre appartiennent aussi à la première classe ; par exemple : E

1° le système des points d'un intervalle linéaire qui ont pour abscisses des nombres rationnels ;

2° le système des points d'un intervalle linéaire qui ont pour abscisses des nombres algébriques.

B. Pour le 1er système : B

On peut ranger tous les nombres rationnels de l'intervalle (0, 1) en une suite simplement infinie (dénombrable). En effet, $\frac{p}{q}$ étant la forme irréductible d'un nombre rationnel, p et q sont des nombres entiers positifs ayant pour plus grand commun diviseur 1 ; posons donc :

$$p + q = N$$

A chaque nombre $\frac{p}{q}$ correspond une valeur finie et déterminée (positive entière) de N ; et à chaque valeur positive entière de N correspond un nombre fini de systèmes de valeurs p et q. On pourra donc ranger l'ensemble des nombres $\frac{p}{q}$ dans un ordre tel



que ceux qui correspondent à des valeurs plus petites de N précèdent ceux qui correspondent à des valeurs plus grandes de N; et que ceux pour lesquels N a la même valeur se suivent par ordre de grandeur croissante. Alors chacun des nombres $\frac{p}{q}$ viendra occuper une place parfaitement déterminée dans une suite simplement infinie équivalente à la suite des nombres entiers —

A. Pour le 2e système:

On nomme, en général, nombre algébrique réel un nombre réel ω qui est racine d'une équation non identique de la forme

$$(1) \qquad a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

où $n, a_0, a_1, \ldots a_n$ sont des nombres entiers; nous pouvons supposer que les nombres n et a_0 sont positifs, que les coefficients $a_0 a_1 \ldots a_n$ n'ont pas de diviseur commun et que l'équation (1) est irréductible. Ces suppositions étant faites, il résulte des théorèmes fondamentaux de l'arithmétique et de l'algèbre que l'équation (1) admettant pour racine un nombre algébrique réel déterminé est une équation entièrement déterminée; inversement, à une équation de la forme (1) correspondent au plus autant de nombres algébriques réels racines de cette équation qu'il y a d'unités dans le degré n.

Les nombres algébriques réels constituent un ensemble de nombres que nous désignerons par (ω). Cet ensemble est de telle nature que il existe une infinité de nombres de (ω) dont la différence avec un nombre quelconque α est moindre qu'une quantité donnée si petite qu'elle soit. Cette remarque rend d'autant plus frappante la propriété suivante:

L'on peut faire correspondre un à un les nombres du système (ω) aux nombres entiers positifs, dont la suite constitue le système (ν), de telle façon qu'à chaque nombre algébrique réel ω réponde un nombre entier positif déterminé ν, et que l'inversement à chaque nombre

entier positif ν réponde un nombre réel algébrique ω complètement déterminé. En d'autres termes on peut imaginer tous les nombres de l'ensemble (ω) rangés suivant une certaine loi en une suite infinie : $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_\nu, \dots$ parallèle à la suite des nombres entiers positifs $1, 2, \dots \nu, \dots$

§1. En effet, appelons hauteur du nombre ω racine réelle de l'équation (1), le nombre entier positif N formé de la manière suivante :

$$N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$$

Pour chaque nombre algébrique réel, ce nombre N est déterminé ; inversement, à un nombre entier positif N ne correspondent qu'un nombre limité de nombres algébriques ayant pour hauteur N ; soit $\varphi(N)$ ce nombre. On aura, par exemple :

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(2) = 2, \quad \varphi(3) = 4, \dots$$

Les nombres du système (ω) c.à.d tous les nombres algébriques réels peuvent donc être rangés dans l'ordre suivant : on prendra comme 1er nombre ω_1 le seul nombre algébrique de hauteur $N = 1$; on écrira à la suite, par ordre de grandeur croissante, les deux nombres algébriques réels de hauteur $N = 2$, qu'on désignera par ω_2, ω_3 ; puis à leur suite et par ordre de grandeur croissante on écrira les quatre nombres de hauteur $N = 3$; d'une manière générale, après qu'on aura compté et classé les nombres de l'ensemble (ω) jusqu'à une hauteur $N = N_1$, on rangera à leur suite, par ordre de grandeur croissante, les nombres réels algébriques de hauteur $N = N_1 + 1$. On obtient ainsi le système (ω) sous la forme d'une suite linéaire infinie : $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_\nu, \dots$ et l'on peut, en se reportant à cette classification, parler du ν^e nombre algébrique réel, sans omettre aucun nombre du système (ω).



B. Ainsi l'ensemble (ω) de tous les nombres algébriques réels (et on pourrait ajouter : de tous les nombres algébriques complexes) peut se concevoir sous la forme d'une suite linéaire infinie, c.à.d. que l'ensemble (ω), aussi bien que chacune de ses parties intégrantes infinies, a la puissance de la suite des nombres entiers (est dénombrable.)

A. §2. Théorème :

Lorsque l'on a une suite infinie de nombres réels différents les uns des autres se succédant suivant une loi déterminée quelconque :

(4) $u_1, u_2, \ldots\ldots u_n, \ldots$

on peut dans chaque intervalle (α, β) donné d'avance déterminer un nombre η qui ne se trouve pas dans la suite (4) ; il existe, par conséquent, une infinité de tels nombres. (v. p. 29.)

(Ce théorème est aussi énoncé et démontré autrement dans E.)

Corollaire (théorème de Liouville, ap. Journal de Liouville, 1e série, t. XVI.)

Dans chaque intervalle (α, β) donné d'avance il y a une infinité de nombres transcendants.

En effet, les nombres algébriques réels forment une suite linéaire infinie semblable à la suite (4).

Autre corollaire : L'ensemble infini et continu des valeurs contenues dans un intervalle quelconque (α, β), ou des points d'un segment de droite, a une puissance supérieure à l'ensemble des nombres algébriques.

Ainsi se présente une seconde classe d'ensembles linéaires, dont nous dirons qu'ils sont de la deuxième puissance. A cette classe appartiennent 1o Tout intervalle continu (α, β) ; 2o Tout système composé d'intervalles continus séparés, en nombre fini ou infini ; 3o Tout ensemble de points obtenu en supprimant dans un intervalle continu un nombre fini ou infini de points formant un ensemble de la première classe.

Cette seconde classe sera représentée par l'intervalle continu (0, 1.)

B, §3 : Théorème : B

On peut établir une correspondance réciproque à sens unique entre une grandeur variable e qui peut prendre toutes les valeurs numériques irrationnelles de l'intervalle (0, 1), et une variable x comportant toutes les valeurs réelles, c.à.d. rationnelles et irrationnelles, qui sont ≥ 0 et ≤ 1.

Nous désignerons par $[x]$ le champ d'une variable x, c.à.d. l'ensemble des valeurs que cette variable peut prendre; et nous emploierons les signes convenus pour désigner les relations entre ensembles.

Lemme : Soit : $a_1, a_2, \ldots\ldots a_\nu, \ldots\ldots$

une suite finie ou infinie de variables dont les champs sont deux à deux sans connexion, et $b_1, b_2, \ldots\ldots b_\nu, \ldots\ldots$

une autre suite de même nature. Si à chaque variable a_ν de la 1e suite correspond constamment une variable déterminée b_ν de la 2e, et si les variables correspondantes sont constamment équivalentes, c.à.d. si l'on a :

$$[a_\nu] \sim [b_\nu]$$

on aura aussi :

$$[a] \sim [b]$$

en posant :

$$[a] \equiv [a_1] + [a_2] + \ldots + [a_\nu] + \ldots$$

(cf. page 10.)

$$[b] \equiv [b_1] + [b_2] + \ldots + [b_\nu] + \ldots$$

§4. Or on sait que l'ensemble des nombres rationnels ≥ 0 et ≤ 1 peut se mettre sous la forme d'une suite linéaire infinie :

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots\ldots \varphi_\nu, \ldots\ldots$$ (cf. page 11.)

La variable e peut prendre toutes les valeurs réelles de l'intervalle (0, 1) à l'exception des nombres φ, qui forment un ensemble dénombrable.

Prenons dans l'intervalle (0, 1) une suite infinie qcq. de nombres



irrationnels ε_ν soumis aux conditions : $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$

et : $\lim\limits_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 1$

Par exemple : $\varepsilon_\nu = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2^\nu}$.

Désignons par f une variable qui peut prendre toutes les valeurs réelles de l'intervalle $(0, 1)$ à l'exception des valeurs ε ; soit g une autre variable qui peut prendre toutes les valeurs réelles de l'intervalle $(0, 1)$ sauf les valeurs ε et les valeurs φ. On a :

$$[e] \equiv [g] + [\varepsilon]$$

$$[f] \equiv [g] + [\varphi]$$

Or : $[g] \sim [g]$; $[\varepsilon] \sim [\varphi]$ (ensembles dénombrables) ;

Donc en vertu du lemme : $[e] \sim [f]$.

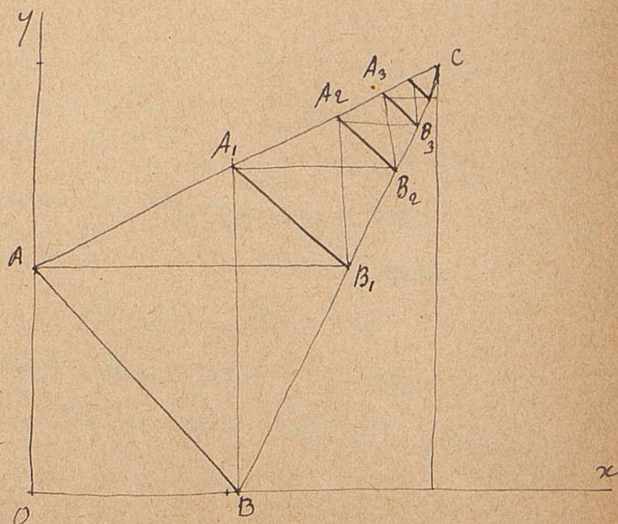
Le théorème à démontrer est donc ramené au théorème suivant :

On peut établir une correspondance univoque et réciproque entre une variable f qui peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle $(0,1)$ à l'exception des valeurs de la suite ε_ν définie plus haut, et une variable x qui peut prendre toutes les valeurs ≥ 0 et ≤ 1 ; en d'autres termes, on a :

$$[f] \sim [x]$$

§5. Lemme I. Soit y une variable qui peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle $(0, 1)$ à l'exception seulement de 0, x une variable qui peut prendre toutes ces valeurs sans exception ; on a : $[y] \sim [x]$.

– C a pour coordonnées $(1, 1)$; $OA = OB = \frac{1}{2}$. On considère la courbe composée des segments $AB, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \ldots$ qui contiennent $A, A_1, A_2, A_3, \ldots$ mais non $B, B_1, B_2, B_3, \ldots$ x prend toutes les valeurs de 0 à 1 inclusiv[t] ; y prend les mêmes valeurs, excepté 0.



En employant les formules de transformation : $x = \frac{u-\alpha}{\beta-\alpha}$, $y = \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$,
on obtient la généralisation du lemme précédent :

Lemme II. Une variable z, qui peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle (α, β) où $\alpha \gtrless \beta$, à l'exception de la seule valeur α, est équivalente à une variable u qui peut prendre toutes les valeurs du même intervalle sans exception.

Lemme III. Une variable w susceptible de prendre toutes les valeurs de l'intervalle (α, β) à l'exception des deux extrêmes α, β, est équivalente à la variable u du lemme II.

Il suffit de partager l'intervalle (α, β) en deux par une valeur intermédiaire.

On va maintenant démontrer le théorème énoncé (page 16) :

Soit f' une variable qui prend toutes les valeurs de l'intervalle $(0, \varepsilon_1)$ excepté la valeur extrême ε_1 ; et en général $f^{(\nu)}$ $(\nu > 1)$ qui prend toutes les valeurs de l'intervalle $(\varepsilon_{\nu-1}, \varepsilon_\nu)$ excepté les 2 valeurs extrêmes $\varepsilon_{\nu-1}$, ε_ν.
Soit d'autre part $x^{(2\nu)}$ une variable prenant toutes les valeurs de l'intervalle $(\varepsilon_{2\nu-1}, \varepsilon_{2\nu})$ sans exception. – Joignons à ces variables la valeur constante 1, on a les identités suivantes :

$$[f] \equiv [f'] + [f''] + \ldots + [f^{\nu}] + \ldots + [1]$$

$$[x] \equiv [f'] + [x''] + \ldots + [f^{2\nu-1}] + [x^{2\nu}] + \ldots + [1]$$

Or, en vertu du lemme III, on a les équivalences :

$$[f^{2\nu}] \sim [x^{2\nu}] \qquad \text{d'ailleurs } [f^{2\nu-1}] \sim [f^{2\nu-1}], \ [1] \sim [1]$$

d'où l'on conclut (lemme de la page 15) l'équivalence :

$$[f] \sim [x] \qquad \text{c. q. f. d.}$$

§6. Autre démonstration, plus simple : Soit toujours x une variable qui peut prendre toutes les valeurs réelles de l'intervalle $(0,1)$ y compris les extrêmes ;



Soit e une variable qui ne comporte que les valeurs irrationnelles de l'intervalle (0,1) ; il faut démontrer que : $[x] \sim [e]$.

Nous pouvons ranger les nombres rationnels ≥ 0 et ≤ 1 en une série linéaire avec le terme général φ_ν (cf. p. 15.) Nous prenons d'autre part dans l'intervalle (0,1) une suite infinie de nombres irrationnels distincts entre eux ; soit η_ν le terme général de cette série (par ex. $\eta_\nu = \frac{\sqrt{2}}{2^\nu}$)

Désignons par h une variable susceptible de prendre toutes les valeurs de l'intervalle (0,1) à l'exception des φ et des η. On a alors :

$$[x] \equiv [h] + [\eta_\nu] + [\varphi_\nu]$$
$$[e] \equiv [h] + [\eta_\nu] \equiv [h] + [\eta_{2\nu-1}] + [\eta_{2\nu}]$$

Or on a les équivalences : $[h] \sim [h]$, $[\eta_\nu] \sim [\eta_{2\nu-1}]$, $[\varphi_\nu] \sim [\eta_{2\nu}]$ d'où l'on conclut (lemme de la p. 15) l'équivalence à démontrer :

$$[x] \sim [e].$$

§8. Les ensembles linéaires de points comprennent deux classes (et deux seulement) dont la première contient tous les ensembles susceptibles d'être ramenés à la forme : functio ipsius n (où n parcourt la suite des nombres entiers positifs), tandis que la seconde classe embrasse tous les ensembles réductibles à la forme : functio ipsius x (où x peut prendre toutes les valeurs réelles ≥ 0 et ≤ 1.)

Il n'y a donc dans les ensembles linéaires infinis que deux espèces de puissance, que nous avons appelées première et seconde puissance.

B. De même qu'une suite à multiple entrée (terme général : $a_{\nu_1, \nu_2, \dots \nu_n}$ où $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_n$ parcourent indépendamment la suite des nombres entiers positifs) est équivalente à une suite linéaire infinie, de même un ensemble continu à n dimensions est équivalent à un ensemble continu linéaire (à 1 dimension seulement)

Riemann et Helmholtz, dans leurs recherches sur les hypothèses qui servent de fondements à la géométrie, partent de la notion d'un ensemble continu à n dimensions, dont le caractère essentiel consisterait, selon eux, en ce que leurs éléments dépendent de n variables réelles indépendantes, continues, en sorte qu'à chaque élément de l'ensemble correspond un certain système de valeurs $(x_1, x_2, \dots x_n)$ et réciproq^t.

Ces auteurs supposent en outre tacitement que cette correspondance est continue, c.à.d. qu'à un changement infiniment petit de valeurs du système $(x_1, x_2, \dots x_n)$ répond un changement infiniment petit de l'élément correspondant, et réciproquement.

Or si on néglige cette supposition, c.à.d. si l'on n'impose à la correspondance entre l'ensemble et ses coordonnées aucune condition restrictive, le caractère considéré comme essentiel par les auteurs devient absolument sans valeur. En effet, comme on va le montrer, on peut déterminer les éléments d'un ensemble continu à n dimensions par une seule coordonnée réelle et continue au moyen d'une opération à sens unique. Il suit de là que, si l'on ne fait aucune supposition sur la nature de la correspondance, le nombre des coordonnées réelles continues et indépendantes qui peuvent servir à la détermination à sens unique des éléments d'un ensemble continu n fois étendu, peut être tout nombre donné m, et que par conséquent on ne peut le considérer comme caractère invariable d'un ensemble donné.

§1. Théorème I. Soient $x_1, x_2, \dots x_n$ n variables indépendantes dont chacune peut prendre toutes les valeurs ≥ 0 et ≤ 1, et soit t une autre variable comprise dans les mêmes limites $(0 \leq t \leq 1)$ on peut faire correspondre cette grandeur t au système des n grandeurs $x_1, x_2, \dots x_n$ de telle sorte qu'à chaque valeur déterminée de t corresponde un système de valeurs déterminées $x_1, x_2, \dots x_n$, et réciproquement.

§2. Pour le démontrer, nous partons de ce théorème connu que tout nombre



irrationnel $e \gtrless^{0}_{1}$ peut être représenté d'une manière complètement déterminée par une fraction continue infinie :

$$e = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{\alpha_\nu + \dots}}}} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\nu, \dots)$$

où les α_ν sont des nombres entiers positifs rationnels.

A chaque nombre irrationnel $e \gtrless^{0}_{1}$ appartient une suite déterminée infinie de nombres entiers positifs α, et réciproquement, chaque suite semblable détermine un certain nombre irrationnel $e \gtrless^{0}_{1}$.

Soient maintenant $e_1, e_2, \dots e_n$ n variables indépendantes dont chacune peut prendre toutes les valeurs irrationnelles de l'intervalle $(0, 1)$; qu'on pose :

$$e_1 = (\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \dots \alpha_{1,\nu} \dots)$$
$$\text{-----------------}$$
$$e_\mu = (\alpha_{\mu,1}, \alpha_{\mu,2}, \dots \alpha_{\mu,\nu} \dots)$$
$$\text{-----------------}$$
$$e_n = (\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \dots \alpha_{n,\nu} \dots)$$

Ces n nombres irrationnels déterminent à sens unique un nouveau nombre irrationnel $d \gtrless^{0}_{1}$, défini par la formule :

$$d = (\beta_1, \beta_2, \dots \beta_\nu \dots)$$

si l'on établit entre les α et les β la relation suivante :

$$\beta_{(\nu-1)n+\mu} = \alpha_{\mu,\nu} \qquad \begin{cases} \mu = 1, 2, \dots n \\ \nu = 1, 2, \dots \infty \end{cases}$$

Inversement, si l'on part d'un nombre irrationnel $d \gtrless^{0}_{1}$, il détermine la suite des β, et au moyen de la relation précédente les suites des α ; par conséquent d détermine complètement et à sens unique le système des n nombres irrationnels $e_1, e_2, \dots e_n$. D'où le théorème :

– Soient $e_1, e_2, \dots e_n$ n variables indépendantes susceptibles de prendre

toutes les valeurs irrationnelles de l'intervalle (0, 1), et soit d une autre variable susceptible de prendre les mêmes valeurs, on peut faire correspondre d'une manière complète et à sens unique cette grandeur d et le système des n grandeurs $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

§3. Or on a démontré (p. 15–18) le théorème suivant :

On peut établir une correspondance univoque et réciproque entre l'ensemble des valeurs irrationnelles de l'intervalle (0, 1) et l'ensemble des valeurs réelles, tant rationnelles qu'irrationnelles, de ce même intervalle.

Donc, si l'on fait correspondre aux $(n+1)$ variables irrationnelles $e_1 e_2 \ldots e_n$ et d les autres variables : $x_1 x_2 \ldots x_n$ et t par une opération à sens unique, chacune de celles-ci pouvant prendre toutes les valeurs réelles ≥ 0 et ≤ 1, on obtient ainsi une correspondance complète à sens unique entre la variable continue t et le système des n variables continues $x_1, x_2 \ldots x_n$, ce qui démontre le th. I.

§4. De ce théorème résulte immédiatement le suivant :

Théorème II. On peut faire correspondre d'une manière complète et à sens unique un ensemble continu à n dimensions à un ensemble continu d'une seule dimension, les éléments d'un ensemble continu à n dimensions pouvant être déterminés à sens unique par une seule coordonnée t réelle et continue.

Corollaire : Deux ensembles continus, l'un de n, l'autre de m dimensions $(n \gtrless m)$ ont la même puissance ; et par suite les éléments d'un ensemble continu à n dimensions peuvent être déterminés à sens unique par un système de m coordonnées continues $t_1 t_2 \ldots t_m$.

Conclusion : La puissance d'un ensemble continu à n dimensions est égale à la puissance d'un ensemble continu d'étendue simple par ex. à celle d'un segment de droite continue et limitée.



§ 8. On peut généraliser le théorème I de la manière suivante :

Soit $x_1\, x_2 \ldots x_\mu \ldots$ une suite simplement infinie de variables réelles indépendantes, dont chacune peut prendre toutes les valeurs ≥ 0 et ≤ 1, et soit $\underline{t}$ une autre variable réelle, ayant mêmes limites $(0 \leq t \leq 1)$, on peut faire correspondre par une opération ~~à sens unique~~ continue à sens unique cette grandeur $\underline{t}$ au système des $x_1\, x_2 \ldots x_\mu \ldots$ qui sont en nombre <u>infini</u>.

En effet, ce théorème se ramène aisément au suivant : (Problème du § 3)

Soit $e_1 e_2 \ldots e_\mu \ldots$ une suite infinie de variables indépendantes dont chacune peut prendre toutes les valeurs <u>irrationnelles</u> de l'intervalle $(0, 1)$, et soit $\underline{d}$ une autre variable irrationnelle susceptible des mêmes valeurs, on peut faire correspondre par une opération à sens unique cette variable $\underline{d}$ au système des $e_1\, e_2 \ldots e_\mu \ldots$ en nombre infini.

En effet, en développant e_μ en fraction continue et en posant :

$$e_\mu = (\alpha_{\mu,1}\, \alpha_{\mu,2}, \ldots \alpha_{\mu,\nu}, \ldots) \qquad \left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} = 1, 2, \ldots \infty$$

d'autre part : $\quad d = (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\lambda, \ldots)$

si l'on établit entre les entiers positifs α et β la relation :

$$\alpha_{\mu,\nu} = \beta_\lambda$$

où :
$$\lambda = \mu + \frac{(\mu+\nu-1)(\mu+\nu-2)}{2}$$

(cette fonction λ jouit de cette propriété remarquable de représenter tous les nombres entiers positifs, et chacun d'eux une fois seulement, quand μ et ν parcourent séparément la suite des nombres entiers positifs) on établira ainsi une correspondance univoque et réciproque entre la suite linéaire des β_λ et la suite infinie à double entrée $\alpha_{\mu,\nu}$, et par conséquent entre la variable d et la suite infinie des valeurs $e_1\, e_2 \ldots e_\mu \ldots$

D'où l'on conclut la généralisation suivante du théorème II :
Un ensemble continu d'un nombre infini de dimensions a la même puissance qu'un ensemble continu d'une seule dimension (à savoir la seconde) pourvu que l'ensemble de ses dimensions soit dénombrable (de la première puissance)

G

G. [De même, une suite à un nombre infini d'entrées, ou infiniment infinie (terme général : $E_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_\mu}$ où $\left.\begin{matrix}\mu \\ \nu_1 \\ \nu_2 \\ \vdots \\ \nu_\mu\end{matrix}\right\} = 1, 2, 3, \ldots \infty$) est dénombrable c.à.d. peut se mettre sous la forme d'une suite simplement infinie :

$e_1, e_2, \ldots e_\nu \ldots$

L'ensemble des nombres algébriques en est un exemple remarquable (p. 12).]

Application à la géométrie générale

Théorème : Soit dans un espace continu G_n à n dimensions étendu à l'infini de tous côtés, un nombre infini d'ensembles partiels (a) continus, de n dimensions, séparés les uns des autres et ne se touchant tout au plus qu'à leurs limites ; je dis que le système des ensembles (a) est dénombrable.

On transforme ~~par rayons vecteurs~~ réciproques l'espace infini G_n en une figure H_n à n dimensions dans l'espace infini G_{n+1} à $(n+1)$ dimensions, de telle sorte que tous les points de H_n soient à une distance 1 d'un point fixe de G_{n+1} (Pour $n=1$, ce sera un cercle de rayon 1 ; pour $n=2$, une sphère de rayon 1.) Le système (a) se transforme ~~un~~ en un système (b) d'ensembles partiels en nombre égal, sur la sphère à n dimensions H_n. Or le système (b) est dénombrable, car le nombre des ensembles (b) dont l'étendue est plus grande qu'un nombre donné γ est nécessairement fini, leur étendue totale devant être plus petite que l'étendue de la sphère H_n : $\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ où ils sont tous contenus. Il s'ensuit qu'on peut les ranger par ordre de grandeur de leurs étendues, en une suite simplement infinie, les plus petits suivant les plus grands et finissant par devenir infiniment petits.



Corollaires :

Cas où $n=1$: Tout ensemble d'intervalles (α, β) distincts, se rencontrant tout au plus à leurs points extrêmes, et situés sur une ligne droite indéfinie, est dénombrable

Cas où $n=2$: Tout ensemble de portions de surface distinctes, se rencontrant tout au plus à leurs limites, et situés dans un plan indéfini, est dénombrable

Ce théorème s'étend aux ensembles de portions de surface distinctes situées sur une surface qui recouvre le plan un nombre fini ou infini de fois.

Théorème. Soit (M) un ensemble de points dénombrable condensé dans toute l'étendue d'un ensemble continu G_n à n dimensions, et soit A l'ensemble qui reste quand on enlève l'ensemble M de l'ensemble G_n ; pour $n \geq 2$, l'ensemble A est encore continu et connexe, c.à.d. que deux points quelconques de cet ensemble peuvent être réunis par une ligne continue qui appartient en tous ses points à l'ensemble A, en sorte qu'elle ne contient aucun point de l'ensemble M

La démonstration de ce théorème repose sur le théorème démontré dans A et E (cf p. 14.)

Exemple : Soit G_n $(n=3)$ notre espace à 3 dimensions, M le système de tous les points dont les coordonnées x, y, z sont toutes trois des nombres algébriques. L'on obtient un espace discontinu A à 3 dimensions. Or on peut concevoir un mouvement continu dans cet espace discontinu, car, en vertu du théorème précédent, on peut joindre 2 points quelconques de A par un nombre infini de lignes continues parfaitement régulières. On ne peut donc pas conclure, du seul fait du mouvement continu, la continuité absolue de l'espace, tel qu'on l'a conçu pour expliquer les formes et les mouvements qu'on y constate. L'hypothèse de la continuité de l'espace

n'est donc que la supposition (arbitraire, quoique légitime) de la correspondance complète, réciproque et à sens unique entre le continu purement arithmétique à 3 dimensions (x, y, z) où les coordonnées peuvent être des nombres réels quelconques (rationnels ou irrationnels) et l'espace qui sert de base au monde des phénomènes.

(Cf. <u>Dedekind</u>, La continuité et les nombres irrationnels, 1872.)

— On a vu qu'on peut faire correspondre sans ambiguïté, élément à élément, des ensembles à <u>n</u> dimensions à des systèmes linéaires de points. Cette généralisation des propriétés des ensembles linéaires permet de les ~~l'~~étendre ~~de ramener l'étude~~ à un ensemble quelconque de n dimensions ~~à un ensemble linéaire~~; et inversement, elle fournit de nouveaux points de vue pour l'étude des ensembles linéaires.

On peut étendre immédiatement la notion des ensembles dérivés de divers ordres aux systèmes de points déterminés dans des ensembles continus de <u>n</u> dimensions. Cette extension repose sur la définition générale du <u>point-limite</u> d'un ensemble donné P : dans un espace aussi petit qu'on veut entourant ce point, il y a des points de l'ensemble P autres que ce point lui-même. Le point-limite peut donc appartenir ou ne pas appartenir à l'ensemble P. (cf définition du point-limite, p. 5.)

M. <u>Weierstrass</u> a le premier, énoncé d'une manière générale, et appliqué à la théorie des fonctions, le théorème suivant :

Tout système de points composé d'un nombre infini de points et situé dans une portion finie et continue d'un ensemble à <u>n</u> dimensions a au moins un point-limite. (cf. page 5.)

Étant donné un système de points P dans un ensemble continu G_n à <u>n</u> dimensions, on dit que ce système est <u>condensé dans toute l'étendue</u> d'un ensemble continu partiel <u>a</u> contenu dans G_n, si tout ensemble



a' contenu dans a et ayant le même nombre de dimensions que a renferme des points du système P.

Les dérivés successifs d'un système de points P ~~contenu~~ condensé dans toute l'étendue d'un ensemble continu a renferment cet ensemble a lui-même avec tous les points de sa limite ; réciproq^t, cette propriété du système P peut servir à définir la condensation de ce système dans toute l'étendue de l'ensemble continu a.

La notion de puissance s'étend aux ensembles à n dimensions. On a démontré que les puissances des systèmes de points compris dans des ensembles continus de n dimensions sont les mêmes que celles des ensembles linéaires de points (B, cf. pages 19-21.)

Et on sait que toutes les puissances des ensembles linéaires de points se réduisent à deux ; la première est celle de la suite des nombres entiers ; la seconde est celle d'~~un~~ u continu linéaire ~~limité~~ (p. 18)

H. Théorème : Tout ensemble du premier genre et de la n^e espèce est dénombrable (cf. page 11.)

En effet, son n^e dérivé est un ensemble isolé ; écrivons l'identité :

$$P' \equiv (P'-P'') + (P''-P''') + \ldots\ldots + (P^{n-1}-P^{n}) + P^{n}$$

Tous les termes du second membre sont des ensembles isolés, donc dénombrables. P' étant dénombrable, P l'est aussi (th. de la p. 11.)

F. _ Si l'ensemble P est du deuxième genre, P' se composera de deux ensembles essentiellement distincts, l'un, Q, se compose des points de P' qui disparaissent dans la suite P', P'', P''' .... quand on la prolonge indéfiniment par des dérivations successives ; l'autre, R, comprend les points qui subsistent dans tous les dérivés successifs : R est donc défini par la formule

$$R \equiv \mathfrak{D}(P', P'', P''', \ldots\ldots)$$

où figurent dans la parenthèse tous les dérivés de P (en nombre infini)

Désignons maintenant par le signe P^{ω} cet ensemble R ainsi obtenu et appelons-le système dérivé de P d'ordre ω.

Soient $P^{\omega+1}, P^{\omega+2}, \ldots\ldots P^{\omega+n} \ldots\ldots$ les dérivés successifs de P^{ω}. P^{ω} aura généralement aussi un dérivé d'ordre ω, que nous appellerons $P^{2\omega}$. Celui-ci engendrera à son tour un dérivé $P^{3\omega}$, et ainsi de suite; on aura des dérivés de la forme:

$$P^{n_0\omega+n_1}$$

où n_0, n_1 sont des entiers positifs.

Mais nous pouvons aller plus loin et former le système:

$$\mathfrak{D}(P^{\omega}, P^{2\omega}, P^{3\omega}, \ldots\ldots)$$

qui sera désigné par le symbole P^{ω^2}.

En répétant maintenant la même opération et en la combinant avec les précédentes, on arrive à une notion plus générale, celle du système dérivé:

$$P^{n_0\omega^2+n_1\omega+n_2}$$

et en poursuivant cette marche on arrive à:

$$P^{n_0\omega^{\nu}+n_1\omega^{\nu-1}+\ldots\ldots+n_{\nu}}$$

où $n_0, n_1, \ldots\ldots n_{\nu}$ sont des nombres entiers positifs. En continuant cette généralisation, on est amené à considérer ν comme variable (croissant indéfiniment) et à envisager le système:

$$P^{\omega^{\omega}} = \mathfrak{D}(P^{\omega}, P^{\omega^2}, P^{\omega^3}, \ldots\ldots)$$

On obtient successivement, par le même procédé, les systèmes dérivés désignés par: $P^{n\omega^{\omega}}$, $P^{\omega^{\omega+1}}$, $P^{\omega^{\omega+n}}$, $P^{\omega^{\omega^n}}$, $P^{\omega^{\omega^{\omega}}}$, etc.

Nous avons ainsi une suite infinie de systèmes qui se déduisent les uns des autres suivant une loi nécessaire et indépendamment de toute conception arbitraire.

On a, par définition, pour les ensembles du premier genre: $P^{\omega} \equiv 0$, et réciproquement.



Les systèmes du premier genre sont donc complètement caractérisés par cette équation.

On peut construire des systèmes de points du deuxième genre pour lesquels : P^{ω}, $P^{\omega+n}$, $P^{2\omega}$, en général : $P^{n_0\omega^{\nu}+n_1\omega^{\nu-1}+\dots+n_\nu}$ se composent d'un seul point déterminé d'avance.

Ces systèmes et leurs analogues ne sont condensés dans aucun intervalle ; de plus ils appartiennent à la première classe ; ils ressemblent donc aux systèmes du premier genre.

H. Tout système du deuxième genre peut se mettre sous la forme suivante : le dérivé de

$$P' = (P'-P'') + (P''-P''') + \dots (P^{\nu-1}-P^{\nu}) + \text{à l'infini} + P^{\omega}.$$

Théorème. Tout système du deuxième genre pour lequel P^{ω} est dénombrable, est lui-même dénombrable (de la première classe)

Plus généralement, en désignant par α un des symboles d'infini introduits ci-dessus (F), on a le théorème :

Tout ensemble du deuxième genre pour lequel P^{α} est dénombrable est également dénombrable. Inversement :

P étant un système non-dénombrable, P^{α} ne le sera pas non plus que α désigne un nombre fini, ou un des symboles d'infini.

Du Bois-Reymond et Harnack ont employé des systèmes de points linéaires que l'on peut renfermer dans un nombre fini d'intervalles tels, que la somme de tous ces intervalles soit plus petite qu'une grandeur donnée à volonté.

Pour qu'un système de points linéaire jouisse de cette propriété, il faut évidemment qu'il ne soit condensé dans aucun intervalle si petit qu'il soit ; mais cette condition ne paraît pas suffisante pour qu'un système de points possède cette propriété.

Théorème : Si un système de points linéaire P contenu dans un intervalle (a, b) est constitué de telle sorte que son dérivé P' soit dénombrable, on peut enfermer P dans un nombre fini d'intervalles, la somme de ces intervalles étant aussi petite qu'on voudra.

Lemmes : 1° Une fonction continue $\varphi(x)$ donnée dans un intervalle (c, d) de la variable continue x, et ayant à ses limites les valeurs inégales $\varphi(c)$ et $\varphi(d)$, prend une fois au moins une valeur y comprise entre $\varphi(c)$ et $\varphi(d)$.

2° Un nombre infini d'intervalles extérieurs l'un à l'autre et ne se rencontrant qu'à leurs limites, situés sur une droite infinie, ~~est~~ forme un ensemble dénombrable (v. p. 24.)

3° Étant donné un ensemble de la première puissance :

$$u_1, u_2, \ldots\ldots u_\nu, \ldots\ldots$$

on peut dans tout intervalle proposé trouver une grandeur η qui ne se rencontre pas dans cet ensemble (v. p. 14.)

Démonstration. Prenons, pour simplifier, l'intervalle (a, b) égal à $(0, 1)$: $a = 0$, $b = 1$. Cet intervalle contient P et P', donc il contient :

$$Q \equiv \mathfrak{M}(P, P')$$

Posons :

$$(0, 1) \equiv Q + R$$

R est l'ensemble de tous les points de l'intervalle $(0, 1)$ qui n'appartiennent ni à P ni à P'.

P' étant dénombrable par hypothèse, P l'est aussi, donc Q aussi. De plus P et P' ne sont condensés dans aucun intervalle, sans quoi P' ne serait pas dénombrable. Donc Q n'est condensé dans aucun intervalle. Les abscisses des points de l'ensemble dénombrable Q peuvent être appelées :

$$u_1, u_2, \ldots\ldots u_\nu, \ldots\ldots$$

Soit z un point de R, les points de Q ne peuvent se rapprocher à



~~au dérivé P~~ (P, selon Cantor)
l'infini de z, sans quoi $\underline{z}$ serait un point limite de Q et appartiendrait ~~à P', donc~~ à Q. Le point $\underline{z}$ est donc compris entre 2 points $\underline{c}$ et $\underline{d}$ tels qu'aucun point de Q ne se trouve dans l'intervalle (c, d), mais qu'en dehors de cet intervalle il y ait des points de Q aussi rapprochés qu'on voudra de $\underline{c}$ et $\underline{d}$, à moins que ceux-ci ne soient des points isolés de Q ; de toute façon, $\underline{c}$ et $\underline{d}$ appartiennent à Q (qui contient son dérivé, ~~parfait~~ ~~[illegible]~~) — Les intervalles en nombre infini (c, d) ainsi obtenus sont tous extérieurs l'un à l'autre ; ils forment donc un ensemble dénombrable.

— La grandeur de l'intervalle de rang ν est : $\quad (d_\nu - c_\nu)$

La somme de tous ces intervalles sera donc : $\quad \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} (d_\nu - c_\nu) = s.$

On voit a priori que : $\quad s \leq 1$

Il s'agit de démontrer que $\quad s = 1.$

Définissons, pour : $\quad 0 \leq x \leq 1$, une fonction $f(x)$ égale à la somme de tous les intervalles (c_ν, d_ν) compris entre 0 et $\underline{x}$ (y compris la partie de l'intervalle où peut tomber $\underline{x}$ qui est entre 0 et $\underline{x}$.)

On a évidemment : $\quad f(0) = 0, \qquad f(1) = s.$

$f(x)$ est une fonction continue dans l'intervalle $(0, 1)$; en effet :

$$0 < f(x+h) - f(x) \leq h$$

Si $\underline{x}$ et $\underline{x+h}$ sont 2 valeurs distinctes d'un même intervalle (c_ν, d_ν)

on a : $\quad f(x+h) - f(x) = h$

donc : $\quad (x+h) - f(x+h) = x - f(x)$

Introduisons la fonction : $\quad \varphi(x) = x - f(x)$

$\varphi(x)$ sera une fonction continue qui ne peut que croître de 0 à $(1-s)$ quand x croît de 0 à 1 ; elle garde une valeur constante dans chacun des intervalles (c_ν, d_ν). Donc toutes les valeurs qu'elle prend forment l'ensemble dénombrable :

$$\varphi(u_1),\ \varphi(u_2), \ldots \ \varphi(u_\nu), \ldots$$

Car, ou bien $x = u_\nu$, et alors : $\varphi(x) = \varphi(u_\nu)$
ou bien x tombe dans un des intervalles (c_ν, d_ν) et alors :

$$\varphi(x) = \varphi(c_\nu) = \varphi(d_\nu)$$

et comme c_ν, d_ν appartiennent à l'ensemble Q, on a par exemple :

$$c_\nu = u_\lambda \qquad \text{donc} \qquad \varphi(x) = \varphi(u_\lambda)$$

Or si $s<1$, c.à.d. $1-s>0$, la fonction continue $\varphi(x)$ prendrait au moins une fois toute valeur réelle y comprise entre 0 et $(1-s)$; mais l'ensemble de ces valeurs n'est pas dénombrable tandis que nous venons de prouver que l'ensemble des valeurs de $\varphi(x)$ doit être dénombrable. Cette contradiction montre qu'on doit avoir :

$$1-s=0 \qquad \text{ou} \qquad s=1 \qquad \text{c.q.f.d.}$$

K. Généralisation de la notion de nombre entier réel K.

§1. Je me trouve contraint de développer cette notion de nombre au point que je pourrais à peine, sans cela, avancer dans la théorie des ensembles ; que cette nécessité me serve de justification ou de excuse, si cela était nécessaire, pour avoir introduit dans mon travail un ordre d'idées qui y paraît étranger. Car il s'agit de développer cette notion dans le but de continuer la suite des nombres entiers positifs au-delà de l'infini. .... Je ne me dissimule pas que par cette entreprise je me mets en contradiction avec les idées généralement répandues sur l'infini mathématique, et avec les opinions qu'on a souvent défendues sur l'essence de la grandeur numérique.

Pour ce qui concerne l'infini mathématique, dans la mesure où jusqu'à présent il a pu être employé légitimement dans la science et contribuer à ses progrès, il me semble qu'il se présente en première ligne dans le sens d'une grandeur variable, croissant au-delà de toute limite



ou décroissant autant qu'on voudra, mais restant toujours fini. Je donne à cet infini le nom d'infini improprement dit.

Mais dans ces derniers temps, il s'est formé, soit dans la géométrie, soit particulièrement dans la théorie des fonctions, un nouveau genre de notions d'infini, tout aussi légitimes; ainsi, d'après ces notions nouvelles, dans la recherche de une fonction analytique d'une variable complexe, l'usage s'est imposé généralement de se représenter, dans le plan qui représente cette variable complexe, un point unique situé à l'infini, c.à.d. infiniment éloigné, mais néanmoins déterminé, et d'examiner comment se comporte la fonction dans le voisinage de ce point absolument comme dans le voisinage d'un autre point quelconque; on voit alors que la fonction dans le voisinage du point infiniment éloigné se comporte précisément de la même manière que s'il s'agissait de tout autre point situé à distance finie, en sorte qu'on est pleinement autorisé par là à se représenter l'infini, dans ce cas, comme transporté sur un point tout à fait déterminé. — Quand l'infini se présente sous une forme ainsi déterminée, je l'appelle infini proprement dit.

Pour comprendre ce qui va suivre, distinguons bien ces deux formes sous lesquelles s'est présenté l'infini mathématique et sous lesquelles il a contribué aux plus grands progrès dans la géométrie, dans l'analyse et dans la physique mathématique. Sous sa première forme de infini improprement dit, il se présente comme un fini variable; sous sa seconde forme, que j'appelle infini proprement dit, il se présente comme un infini absolument déterminé.

Les nombres entiers infinis que je vais définir ont le même caractère de détermination que nous trouvons, dans la théorie des fonctions analytiques, pour le point infiniment éloigné; ils appartiennent donc aux formes de l'infini proprement dit.

Les rapports des nombres infinis, soit entre eux, soit avec les nombres finis, ne peuvent guère se ramener à des rapports de nombres finis entre eux: ce phénomène a lieu sans doute, mais il ne se présente fréquemment que dans les degrés et les formes diverses de l'infini improprement dit, par exemple dans les fonctions d'une variable x qui deviennent infiniment petites ou infiniment grandes, au cas où elles ont des numéros d'ordre finis déterminés en tendant à l'infini. Ces rapports, en fait, ne peuvent être considérés que comme une espèce de rapports du fini, ou comme pouvant s'y ramener immédiatement; les lois relatives aux nombres entiers proprement infinis sont au contraire complètement différentes des relations qu'on trouve dans le fini.

Les deux principes de formation à l'aide desquels on ~~peut~~ définit les nouveaux nombres infinis déterminés sont tels, qu'en les appliquant ensemble on peut dépasser toutes les limites dans la formation abstraite des nombres entiers réels. Mais heureusement on a d'autre part un troisième principe que j'appelle principe d'arrêt ou de limitation, grâce auquel on peut donner certaines limites successives au procédé de formation qui est absolument sans fin; nous obtiendrons ainsi dans la suite absolument infinie des nombres réels entiers, des divisions naturelles que j'appellerai classes de nombres.

La première classe de nombres (I) est le système des nombres entiers finis $1, 2, 3, \ldots \nu, \ldots$; vient ensuite la seconde classe de nombres (II) composée de certains nombres entiers infinis α se suivant entre eux dans un ordre déterminé:

$$\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots\ldots\ldots \quad 2\omega, 2\omega+1, \ldots\ldots \nu\omega, \ldots\ldots$$

$$\nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \ldots\ldots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu, \ldots\ldots \omega^\omega, \ldots\ldots \omega^{\omega^\omega}, \ldots\ldots \alpha, \ldots\ldots$$

La seconde classe de nombres une fois définie, on arrive à la troisième puis à la quatrième, et ainsi de suite.



§ 11. Nous allons montrer comment on est amené à définir ces nouveaux nombres qui constituent, dans la suite absolument infinie des nombres réels entiers, la seconde classe de nombres.

La suite (I) des nombres entiers 1, 2, 3, ... ν, ...
doit sa formation à la répétition et à la réunion des unités qu'on a prises pour point de départ et que l'on considère comme égales; le nombre ν exprime un nombre fini déterminé de répétitions successives de ce genre, aussi bien que de la réunion des unités choisies en un seul tout. La formation des nombres entiers réels finis repose donc sur le principe de l'addition de l'unité à un nombre déjà formé (premier principe de formation.) Le nombre des nombres ν de la classe I est infini, et parmi tous ces nombres il n'y en a aucun qui soit plus grand que tous les autres. Il serait donc contradictoire de parler d'un nombre maximum de la classe I; toutefois, on peut d'autre part imaginer un nouveau nombre, que nous appellerons ω, et qui servira à exprimer que tout l'ensemble (I) est donné d'après la loi dans sa succession naturelle. On peut même se représenter le nouveau nombre ω comme la limite vers laquelle tendent les nombres ν, à condition d'entendre par là que ω sera le premier nombre entier qui suivra tous les nombres ν, en sorte qu'il faut le déclarer supérieur à tous les nombres ν. En associant le nombre ω aux unités primitives, on obtient à l'aide du premier principe de formation les nombres plus étendus:

$$\omega+1,\ \omega+2, \ldots\ldots\ \omega+\nu, \ldots$$

Comme par là on n'arrive encore une fois à aucun nombre maximum, on en imagine un nouveau, que l'on peut appeler 2ω, et qui sera le premier après tous les nombres obtenus jusqu'à présent, ν et ω+ν; en appliquant à 2ω le premier principe de formation, on arrive à la suite:

$$2\omega+1,\ 2\omega+2, \ldots\ldots\ 2\omega+\nu, \ldots$$

La fonction logique qui nous a donné les deux nombres ω et 2ω, est évidemment différente du premier principe de formation; je l'appelle <u>deuxième principe</u> de formation des nombres réels entiers et je le définis en disant: Etant donnée une succession quelconque déterminée de nombres entiers réels définis, parmi lesquels il n'y en a aucun qui soit plus grand que tous les autres, on pose un nouveau nombre que l'on regarde comme la limite des premiers, c.à.d. qui est défini comme immédiatement supérieur à tous ces nombres.

En appliquant et en combinant ces deux principes de formation, on prolonge la suite des nombres obtenus jusqu'ici comme il suit:

$$3\omega,\ 3\omega+1,\ 3\omega+2, \ldots\ldots 3\omega+\nu, \ldots$$

. . . .

$$\mu\omega,\ \mu\omega+1,\ \mu\omega+2, \ldots\ldots \mu\omega+\nu, \ldots$$

. . . .

On n'arrive jamais à la fin, parce que parmi tous les nombres $\mu\omega+\nu$ il n'y en a aucun qui soit plus grand que tous les autres. Nous introduirons donc, en vertu du deuxième principe un nouveau nombre qui suit immédiatement tous les nombres $\mu\omega+\nu$, et qu'on appellera <u>ω^2</u>; d'où une nouvelle suite de nombres de la forme:

$$\lambda\omega^2+\mu\omega+\nu$$

On arrive évidemment, en continuant à appliquer les deux principes, à des nombres de la forme:

$$\nu_0\,\omega^\mu+\nu_1\,\omega^{\mu-1}+\ldots\ldots+\nu_{\mu-1}\,\omega+\nu_\mu$$

Mais alors le deuxième principe de formation nous amène à poser un nouveau nombre immédiatement supérieur à tous les précédents, qu'on pourra désigner par ω^ω.

La formation de nouveaux nombres, comme on le voit, est sans fin; on pourrait donc croire d'abord que nous allons nous perdre à l'indéfini dans cette formation de nouveaux nombres infinis dans une succession déterminée,



et que nous ne sommes pas en état ~~de nous arrêter dans~~ d'arrêter provisoirement ce procédé sans fin pour arriver par là à une limitation semblable à celle que nous avons trouvée, en fait, dans un certain sens, par rapport à l'ancienne classe de nombres (I); ~~là~~ l'on n'employait que le premier principe de formation et on ne pouvait pas sortir de la suite (I.)

Mais si nous remarquons maintenant que tous les nombres obtenus jusqu'ici et ceux qui les suivent immédiatement remplissent une certaine condition, nous verrons que cette condition, si on la pose comme obligatoire pour tous les nombres à former immédiatement, nous apparaît comme un *troisième principe*, que j'appelle *principe d'arrêt* ou de *limitation*. En vertu de ce principe, la deuxième classe de nombres (II) définie par l'adjonction de ce principe, n'acquiert pas seulement une puissance plus élevée que la classe (I), mais *précisément* la puissance immédiatement supérieure, et par conséquent la *deuxième puissance*.

Cette condition, qui est remplie par tous les nombres infinis α définis jusqu'ici, est que le système des nombres qui se trouvent, dans la suite des nombres, avant celui que l'on considère et à partir de 1, est de la même puissance ~~de~~ que la première classe de nombres (I.)

En effet, prenons par exemple le nombre ω^ω; tous ceux qui le précèdent sont contenus dans la formule:

$$\nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \cdots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu$$

où $\mu, \nu_0, \nu_1, \ldots \nu_{\mu-1}, \nu_\mu$ peuvent prendre toutes les valeurs finies positives entières, y compris zéro, à l'exception ~~du système~~ de la combinaison:

$$\nu_0 = \nu_1 = \ldots = \nu_{\mu-1} = \nu_\mu = 0.$$

On sait que ce système de nombres peut se mettre sous la forme d'une suite *simplement infinie* et par conséquent a la même puissance que (I). Comme toute suite de systèmes de la première ~~puissance~~, donne toujours lieu, si elle est elle-même de la première puissance, à un nouveau système de la

(voir pages 8 et 12.)

première puissance, il est clair qu'en continuant notre suite de nombres on arrive toujours, en fait, à avoir immédiatement de nouveaux nombres qui remplissent la condition énoncée.

Nous définissons donc la deuxième classe de nombres (II) : l'ensemble de tous les nombres <u>α</u> qu'on peut former à l'aide des deux principes de formation, qui se succèdent suivant un ordre déterminé, et qui sont soumis à cette condition, que tous les nombres qui précèdent le nombre <u>α</u>, à partir de 1, forment un système de la même puissance que la classe de nombres (I).

§1. L'introduction de ces nouveaux nombres entiers me paraît tout d'abord très important pour développer et affermir la notion de <u>puissance</u> (p. 7.)

Dans les systèmes finis, la puissance s'accorde avec le <u>nombre</u> des éléments, parce que ces systèmes ont, comme on sait, dans tous leurs arrangements, le même nombre d'éléments.

Pour les systèmes infinis au contraire, il n'avait pas été question généralement d'un <u>nombre</u> d'éléments <u>défini avec précision</u>, mais on pouvait bien leur attribuer aussi une <u>puissance déterminée</u>, et complètement indépendante de l'ordre de leurs éléments.

Il a fallu concéder la plus petite puissance des systèmes infinis aux ensembles capables d'une correspondance réciproque ~~x~~ à sens unique avec la <u>première</u> classe de nombres, et ayant par suite la même puissance. Mais jusqu'à présent on n'avait pas pour les puissances supérieures une définition aussi simple et naturelle

Les classes de nombres entiers réels ~~d~~ infinis déterminés nous apparaissent maintenant comme représentant naturellement, sous une forme unie, la suite régulière des puissances croissantes de systèmes bien définis. On va montrer de la manière la plus précise



que la puissance de la deuxième classe de nombres (II) ne diffère pas seulement de celle de la première classe, mais qu'elle est encore la puissance immédiatement supérieure ; nous pouvons donc l'appeler <u>deuxième puissance</u>. On obtient de même, par la troisième classe de nombres, la définition de la <u>troisième</u> puissance, etc.

§ 12. Nous avons à démontrer tout d'abord le théorème suivant : La nouvelle classe de nombres (II) a une puissance différente de celle de la première classe de nombres (I).

Ce théorème résulte du suivant :

Soit $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_\nu \ldots$ un système dénombrable quelconque de divers nombres de la deuxième classe ; ou il y a un nombre plus grand que tous les autres, soit γ ; ou bien il y a un nombre déterminé β de la deuxième classe qui ne se rencontre pas parmi les nombres α_ν, en sorte que β est plus grand que tous les α_ν, et que tout nombre entier $\beta' < \beta$ est inférieur en grandeur à certains nombres de la suite α_ν ; on peut appeler le nombre γ ou β la limite supérieure de l'ensemble (α_ν).

Il s'ensuit que l'ensemble de tous les nombres de la deuxième classe de nombres n'a pas la même puissance que la première classe ; car autrement on pourrait concevoir l'ensemble (II) sous la forme d'une suite simple :

$$\alpha_1\ \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_\nu \ldots\ldots$$

qui aurait un terme maximum γ ou une limite supérieure β ; dans l'un ou l'autre cas le nombre $(\gamma + 1)$ ou le nombre β, qui appartiennent à la classe (II) ne se trouveraient pas dans la suite (α_ν), ce qui contredit l'hypothèse.

§13. Les puissances des classes (I) et (II) se suivent immédiatement, c.à.d. qu'il n'y en a pas d'autre entre les deux.

Si l'on conçoit un ensemble quelconque de nombres (α) contenu dans la classe (II), cet ensemble aura toujours les propriétés suivantes :

Parmi les nombres de l'ensemble (α) il y en a un plus petit que tous les autres.

Etant donné, en particulier, une suite de nombres de l'ensemble (II) : $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_\nu \ldots\ldots$
dont la grandeur va toujours en décroissant, cette suite doit être finie, et se termine par le plus petit des nombres qu'elle contient.

Théorème : Etant donné un ensemble quelconque de nombres (α) contenu dans la classe (II) il ne peut se présenter que trois cas : ou bien (α) est un ensemble fini ; ou bien (α) a la puissance de la classe (I), ou bien il a la puissance de la classe (II).

Corollaires : Etant donné un système quelconque bien défini M de la puissance de la classe de nombres (II), si on prend dans M un système partiel infini quelconque M', ou bien on peut concevoir l'ensemble M' sous forme d'une suite simplement infinie, ou bien on peut faire correspondre réciproquement à sens unique les systèmes M et M'.

Etant donné un système bien défini quelconque M de la deuxième puissance, un système partiel M' pris dans M, et un système partiel M'' pris dans M', si le dernier système M'' peut correspondre, d'une manière réciproque et à sens unique, au premier M, on peut aussi faire correspondre de la même manière le deuxième M' au premier M, et par suite aussi au troisième M''.

Ce dernier théorème a ceci de très-remarquable, c'est qu'il est vrai en général, quelle que soit la puissance de l'ensemble M



§12. Dans ce développement de la notion de nombre entier réel, qui conduit à une nouvelle puissance de systèmes bien définis, distincte de la première, il y a trois moments importants à distinguer : ce sont les deux principes de formation, et le principe de limitation, qui consiste en ce qu'on ne peut entreprendre, à l'aide d'un des deux autres principes la formation d'un nouveau nombre entier qu'à une condition nécessaire ; c'est que l'ensemble de tous les nombres précédents ait la même puissance qu'une classe de nombres dont on a déjà défini l'étendue. Par cette méthode, en observant ces trois principes, on peut toujours arriver à de nouvelles classes de nombres, et, par elles, à toutes les puissances diverses, successivement croissantes, qu'on rencontre dans la nature matérielle ou immatérielle. Les nouveaux nombres ainsi obtenus ont alors toujours la même précision concrète et la même réalité objective que les précédents ; je ne sais donc pas, en vérité, ce qui pourrait nous empêcher de nous servir de ce moyen de formation de nouveaux nombres, quand on voit que, pour le progrès des sciences, il est indispensable d'introduire une nouvelle classe de nombres.

§2. Un avantage considérable des nouveaux nombres consiste dans une notion nouvelle, celle du nombre des éléments d'un ensemble infini bien ordonné. Comme cette notion est toujours exprimée par un nombre complètement déterminé de l'ensemble de nombres que nous avons développé, pourvu seulement que l'ordre des éléments du système soit déterminé, et comme d'autre part la notion de nombre d'éléments a une représentation objective immédiate, ce rapport entre le nombre des éléments d'un ensemble et le nombre (généralisé) démontre la réalité de ce dernier même dans le cas où il est infini et en même temps déterminé.

Par ensemble bien ordonné j'entends tout système bien défini où les éléments sont unis entre eux par une succession donnée et déterminée, d'après laquelle il y a un premier élément du système, et chaque élément (sauf le dernier) est suivi immédiatement d'un élément déterminé.

Etant donné un système de la première puissance on peut en former une infinité de systèmes bien ordonnés (par permutations circulaires ou autres.)

Deux systèmes bien ordonnés sont dits avoir le même nombre quand on peut établir entre eux une correspondance réciproque à sens unique telle que, E et F étant deux éléments quelconques de l'un, E_1 et F_1 les éléments correspondants de l'autre, la position relative de E et F dans la succession du premier système concorde toujours avec la position relative de E_1 et F_1 dans le second. Cette correspondance, si elle est possible, est toujours complètement déterminée; de sorte que si l'on fait correspondre un système bien ordonné à la suite des nombres entiers développée, il y a toujours dans celle-ci un nombre α, et un seul, tel que l'ensemble de ceux qui le précèdent dans la suite naturelle des nombres (à partir de 1) ait le même nombre que le système considéré. On prendra donc pour nombre du système bien ordonné ce nombre α s'il est infini, ou le nombre $(\alpha - 1)$, si α est fini.

Par exemple, les trois ensembles bien ordonnés :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \ldots\ldots \alpha_{2\nu-1}, \alpha_{2\nu}, \ldots\ldots)$$
$$(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_{2\nu}, \alpha_{2\nu-1}, \ldots\ldots)$$
$$(1, 2, 3, 4, \ldots\ldots \nu, \ldots\ldots)$$

ayant le même nombre, celui-ci se trouve être égal à ω.



De même, les trois ensembles bien ordonnés suivants, obtenus par la permutation des éléments d'une suite infinie : $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$

$$(\alpha_2, \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots\ldots, \alpha_1)$$
$$(\alpha_3, \alpha_4 \ldots\ldots \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots\ldots, \alpha_1, \alpha_2)$$
$$(\alpha_1, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_{2\nu+1} \ldots, \alpha_2, \alpha_4, \ldots \alpha_{2\nu}, \ldots)$$

ont respectivement pour nombres : $\omega+1$, $\omega+2$ et 2ω.

La différence essentielle entre les systèmes finis et infinis, c'est qu'un système fini offre le même nombre d'éléments dans toutes les successions que l'on peut leur donner ; au contraire, un ensemble d'un nombre infini d'éléments aura en général divers nombres, selon l'ordre que l'on donnera à ses éléments.

La puissance d'un ensemble est indépendante de l'ordre de ses éléments ; mais le nombre du système dépend en général ~~de la~~ d'une succession donnée des éléments.

Cependant, même dans les ensembles infinis, il y a encore une certaine relation entre la puissance du système et le nombre de ses éléments, comme le montrent les théorèmes suivants :

Tout système bien défini ~~peut être~~ de la première puissance peut être dénombré par des nombres de la deuxième classe de nombres, et par ceux-là seulement ; et l'on peut toujours donner aux éléments d'un système donné un ordre de succession tel que le système soit dénombré par un nombre de la deuxième classe pris à volonté.

Tout système bien défini de la deuxième puissance peut être dénombré par des nombres de la troisième classe de nombres, et par ces nombres seulement ; et l'on peut toujours donner à ses éléments un ordre de succession tel, que le système soit dénombré par un nombre de la troisième classe donné à volonté.

[Ce que nous avons appelé ensembles dénombrables, ce sont les ensembles dénombrables par les nombres de la première ou de la deuxième classe, c.à.d. de la première (les ensembles finis ou) puissance]

§ 3. La notion d'ensemble bien ordonné nous apparaît comme fondamentale pour toute la théorie des ensembles.

On peut toujours mettre un système bien défini sous la forme d'un système bien ordonné.

Définition des opérations fondamentales pour les nombres entiers infinis, déduite de la considération des ensembles bien ordonnés:

Soient deux systèmes bien ordonnés M et N, ayant pour nombres α et β; le nombre du système bien ordonné $M+N$ sera par définition la somme: $\alpha+\beta$.

Si les systèmes M et N ne sont pas tous deux finis, le système $M+N$ n'aura pas en général le même nombre que le système $N+M$, donc $\alpha+\beta$ sera en général différent de $\beta+\alpha$

La loi de commutation cesse donc d'être vraie pour l'addition. Au contraire, la loi de association est généralement vraie:

$$\alpha+(\beta+\gamma) = (\alpha+\beta)+\gamma$$

Si l'on prend une succession, déterminée par le nombre β, de systèmes tous égaux et également ordonnés, dans chacun desquels le nombre des éléments est égal à α, on obtient un nouveau système bien ordonné dont le nombre sera par définition le produit $\beta\alpha$; ici encore il se trouve que $\beta\alpha$ diffère généralement de $\alpha\beta$; donc la loi de commutation n'est pas vraie en général pour la multiplication. Au contraire, la loi de association s'applique à la multiplication:

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma.$$

§ 14. La loi de distribution est vraie sous la forme suivante:

$$(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma+\beta\gamma$$

où $(\alpha+\beta)$, α, β sont considérés comme multiplicateurs.



La soustraction peut être considérée à deux points de vue.

L'équation : $\alpha + \xi = \beta$ où $\alpha < \beta$

admet toujours une solution en ξ, et une seule : on pose :

$$\xi = \beta - \alpha$$

Mais l'équation : $\xi + \alpha = \beta$

n'est pas toujours résoluble en ξ ; et quand elle l'est, on peut souvent y satisfaire par une infinité de valeurs, parmi lesquelles il y en a toujours une plus petite que toutes les autres, qu'on désignera par :

$$\beta_{-\alpha}$$

Si l'on a entre 3 nombres l'égalité : $\beta = \gamma\alpha$

(γ multiplicateur), l'équation : $\beta = \xi\alpha$

n'a pas d'autre solution que $\xi = \gamma$; on écrit : $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$

Mais l'équation : $\beta = \alpha\xi$ (ξ multiplicande)

si elle est résoluble, a généralement plusieurs racines et même une infinité, mais il y en a toujours une plus petite que toutes les autres, qu'on désignera par : $\frac{\beta}{\alpha}$.

§3. On entendra par <u>nombre premier</u> un nombre α tel que la décomposition en deux facteurs : $\alpha = \beta\gamma$, où β est multiplicateur n'est possible que si $\beta = 1$ ou $\beta = \alpha$. Le multiplicande γ est au contraire indéterminé dans une certaine mesure.

Néanmoins, la décomposition d'un nombre en ses facteurs premiers peut toujours avoir lieu d'une manière unique et déterminée même au point de vue de la suite des facteurs, tant que ces facteurs ne sont pas des nombres premiers finis se présentant à côté l'un de l'autre dans le produit.

§14. Les nombres $\underline{\alpha}$ de la deuxième classe de nombres sont de deux espèces : 1° les $\underline{\alpha}$ précédés immédiatement dans la suite naturelle d'un autre nombre qui est alors α_{-1} ; je les appelle nombres de la <u>première espèce</u> ; 2° les $\underline{\alpha}$ qui ne sont pas précédés immédiatement d'un autre nombre, pour lesquels par conséquent il n'y a pas d'α_{-1}, et que j'appelle nombres de la <u>deuxième espèce</u>. Les nombres ω, 2ω, $\omega^\nu+\omega$, ω^ω sont de la deuxième espèce ; $\omega+1$, $\omega^2+\omega+2$, $\omega^\omega+3$ sont de la première.

De même les nombres premiers de la deuxième classe se divisent aussi en nombres de la deuxième et en nombres de la première espèce.

Les nombres premiers de la deuxième espèce sont, par ordre naturel :

$$\omega,\ \omega^\omega,\ \omega^{\omega^2},\ \omega^{\omega^3},\ \ldots\ldots$$

en sorte que parmi tous les nombres de la forme :

$$\varphi = \nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \ldots\ldots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu$$

il n'y a qu'un nombre premier, savoir ω, de la deuxième espèce. Mais qu'on ne conclue pas, de cette rareté relative, que l'ensemble de tous les nombres premiers de la deuxième espèce ait une puissance moindre que la classe (II) ; il se trouve qu'il a la même puissance que la classe (II) elle-même.

Les nombres : $\omega+1,\ \omega^2+1,\ \ldots\ldots\ \omega^\nu+1,\ \ldots\ldots$

sont les seuls nombres premiers de la première espèce qu'on rencontre parmi les nombres que nous venons de désigner par φ ; l'ensemble de tous les nombres premiers de la première espèce dans (II) a aussi la même puissance que la classe (II).

Propriété particulière des nombres premiers de la deuxième espèce : soit $\underline{\eta}$ un de ces nombres ; on a toujours : $\eta\alpha = \eta$, si α est un nombre quelconque inférieur à η. Donc si α et β sont



deux nombres quelconques inférieurs à η, le produit $\alpha\beta$ sera aussi toujours inférieur à η.

Règles d'addition et de multiplication pour les nombres de la forme

$$\varphi = \nu_0 \omega^{\mu} + \nu_1 \omega^{\mu-1} + \dots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu$$
$$\psi = \rho_0 \omega^{\lambda} + \rho_1 \omega^{\lambda-1} + \dots + \rho_{\lambda-1}\omega + \rho_\lambda$$

où nous supposons ν_0, ρ_0 différents de zéro.

Addition : 1° Si $\mu < \lambda$, $\quad \varphi + \psi = \psi$

2° Si $\mu > \lambda$, $\quad \varphi + \psi = \nu_0 \omega^{\mu} + \dots + \nu_{\mu-\lambda-1}\omega^{\lambda+1}$
$+ (\nu_{\mu-\lambda} + \rho_0)\omega^{\lambda} + \rho_1 \omega^{\lambda-1} + \dots + \rho_{\lambda-1}\omega + \rho_\lambda$

3° Si $\mu = \lambda$, $\quad \varphi + \psi = (\nu_0 + \rho_0)\omega^{\lambda} + \rho_1\omega^{\lambda-1} + \dots + \rho_{\lambda-1}\omega + \rho_\lambda$.

Multiplication : 1° Si $\nu_\mu \gtrless 0$,

$$\varphi\psi = \nu_0 \omega^{\mu+\lambda} + \nu_1 \omega^{\mu+\lambda-1} + \dots + \nu_{\mu-1}\omega^{\lambda+1} + \nu_\mu \rho_0 \omega^{\lambda} + \rho_1 \omega^{\lambda-1} + \dots + \rho_{\lambda-1}\omega + \rho_\lambda$$

Si $\lambda = 0$, le dernier terme est : $\nu_\mu \rho_0$.

2° Si $\nu_\mu = 0$,

$$\varphi\psi = \nu_0 \omega^{\mu+\lambda} + \nu_1 \omega^{\mu+\lambda-1} + \dots + \nu_{\mu-1}\omega^{\lambda+1} = \varphi\omega^{\lambda}.$$

Décomposition d'un nombre φ en ses facteurs premiers : Soit :

$$\varphi = c_0 \omega^{\mu} + c_1 \omega^{\mu_1} + c_2 \omega^{\mu_2} + \dots + c_i \omega^{\mu_i}$$

où : $\mu > \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_i$, et $c_0, c_1, c_2, \dots c_i$ nombres finis positifs non nuls

$$\varphi = c_0(\omega^{\mu-\mu_1} + 1)\, c_1 (\omega^{\mu_1-\mu_2} + 1)\, c_2 \dots c_{i-1} (\omega^{\mu_{i-1}-\mu_i} + 1)\, c_i\, \omega^{\mu_i}$$

et si l'on décompose $c_0, c_1, c_2, \dots c_i$ en leurs facteurs premiers finis, on a la décomposition de φ en facteurs premiers, dans un ordre déterminé, car on sait que ω et $(\omega^{x} + 1)$ sont des nombres premiers.

§10. La notion du <u>continu</u> n'a pas seulement joué un rôle important dans le développement des sciences en général, elle a encore provoqué de grands partages d'opinion et par suite de vives discussions —

Leucippe, Démocrite et Aristote considèrent le continu comme composé de parties divisibles à l'infini ; Épicure et Lucrèce en font un composé de leurs atomes finis ; S. Thomas d'Aquin soutient que le continu n'est pas composé d'un nombre fini ou infini de parties, mais qu'il n'a pas de parties du tout.

Les idées intuitives de l'espace et du temps ne peuvent servir à définir la notion plus primitive et plus générale du continu.

Il ne me reste donc plus qu'à chercher, au moyen des notions de nombres réels définies précédemment, une idée purement arithmétique, et aussi générale que possible, d'un continu de points. Je prends nécessairement pour point de départ <u>l'espace arithmétique plan</u> à <u>n</u> dimensions G_n, c.à.d. l'ensemble de tous les systèmes de valeurs :

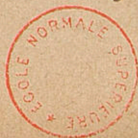
$$(x_1, x_2, \ldots\, x_n)$$

où chaque <u>x</u> peut prendre indépendamment des autres toutes les valeurs numériques réelles de $-\infty$ à $+\infty$. J'appellerai tout système de valeurs de ce genre un <u>point arithmétique</u> de G_n. <u>La distance</u> de deux de ces points est définie par l'expression :

$$+\sqrt{(x_1'-x_1)^2+(x_2'-x_2)^2+\ldots+(x_n'-x_n)^2}$$

et par un système de points arithmétiques P contenu dans G_n on entend tout ensemble donné de points de l'espace G_n. L'examen aboutit donc à donner une définition exacte et aussi générale que possible, quand on peut appeler l'ensemble P un continu.

On a démontré (v. p. 21) que tous les espaces G_n, si grand que soit le nombre n de leurs dimensions, ont la même puissance entre eux, et par suite la même puissance que le <u>continu linéaire</u>, et la même que



l'ensemble de tous les nombres réels de l'intervalle (0, 1). Or on peut démontrer rigoureusement que la puissance de ce dernier ensemble n'est autre que celle de notre deuxième classe de nombres (II). De là résultera que tous les systèmes de points infinis P ont soit la puissance de la première classe de nombres, soit celle de la seconde. On pourra encore en tirer cette autre conséquence que l'ensemble de toutes les fonctions d'une ou de plusieurs variables pouvant être représentées sous la forme d'une série infinie quelconque, n'a de même que la puissance de la classe (II) et par conséquent peut être dénombré par des nombres de la classe (III). Ce théorème se rapporte par exemple à l'ensemble de toutes les fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables ou à l'ensemble de toutes les fonctions d'une ou plusieurs variables réelles qu'on peut représenter par des séries trigonométriques.

Pour arriver à la notion générale d'un continu donné dans G_n, rappelons la définition des ensembles dérivés successifs d'un ensemble P.

On peut partager les systèmes de points P en deux classes d'après la puissance de leur premier dérivé P'. Si P' est de la première puissance on sait qu'il y a un premier nombre entier α de la première ou de la deuxième classe, pour lequel $P^{(\alpha)}$ disparaît. — Mais si P' n'est pas de la première puissance, on peut toujours, et d'une seule manière, décomposer P' en deux systèmes R et S : $\qquad P' \equiv R + S$ jouissant des propriétés suivantes :

R est de la première puissance, et tel qu'il y a toujours un premier nombre entier γ de la première ou de la deuxième classe, pour lequel :

$$\mathfrak{D}(R, R^{(\gamma)}) \equiv 0 \qquad \text{(M. Bendixson)}$$

S au contraire est tel que la dérivation n'y change rien, de sorte que :

$$S \equiv S' \equiv \ldots\ldots \equiv S^{(\gamma)}$$

J'appelle ces systèmes S ~~systèmes~~ ensembles parfaits de points. Donc :

Quand P' n'est pas de la première puissance, il se divise à sens unique en un ~~système~~ ensemble parfait S et en un ensemble R de la première puissance.

Les ensembles parfaits de points ne sont pas nécessairement condensés dans toute leur étendue; ils ne donnent donc pas encore la définition complète d'un continu de points; mais le continu doit toujours être un ~~système~~ ensemble parfait.

Pour définir le continu, il faut joindre à la notion précédente celle d'un ensemble de points bien enchaîné.

Nous disons qu'un système de points donné T est bien enchaîné, quand, étant donnés 2 points quelconques t et t' de ce système, et un nombre ε aussi petit qu'on veut, on peut toujours trouver, et de plusieurs manières, un nombre fini de points $t_1, t_2, \ldots t_\nu$ de T tels que les distances $tt_1, t_1t_2, \ldots\ldots t_\nu t'$ soient toutes plus petites que ε.

Tous les continus de points géométriques que nous connaissons sont des ensembles bien enchaînés. Je crois reconnaître dans ces deux attributs: parfait et bien enchaîné les caractères suffisants d'un continu de points, et je définis un continu de points dans G_n : un ensemble parfait et bien enchaîné.

— Comme exemple d'un ensemble parfait qui n'est condensé dans aucun intervalle si petit qu'il soit, j'indique l'ensemble de tous les nombres réels compris dans la formule:

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \cdots\cdots + \frac{c_\nu}{3^\nu} + \cdots$$

où les coefficients c_ν peuvent recevoir les valeurs 0 ou 2 à volonté.

— Théorème: Un ensemble de la première puissance ne peut jamais être un ensemble parfait.



D'après notre définition, on ne peut entendre par <u>continu</u> qu'un ensemble <u>parfait et bien enchaîné</u>. Par suite, une étendue droite, par exemple, à laquelle manque une ou deux extrémités, un cercle sans frontière, ne sont pas des continus parfaits ; je les appelle des semi-continus.

En général, j'entends par <u>semi-continu</u> un système de points imparfait, bien enchaîné, de la deuxième puissance et constitué de telle sorte que deux quelconques de ses points puissent être joints par un continu linéaire parfait dont tous les points fassent partie du système.

Tel est par exemple l'ensemble désigné par A (page 24), obtenu en enlevant de l'espace G_n un système de points quelconque de la première puissance.

Le dérivé d'un ensemble de points bien enchaîné (de la première ou de la deuxième puissance) est toujours un continu.

Un ensemble de points de la <u>première puissance</u> ne peut être appelé ni continu ni semi-continu.

– Théorèmes de Cantor :

Le nombre α appartenant à la première ou à la seconde classe, si P est un ensemble tel que son dérivé d'ordre α s'évanouisse, son premier dérivé et P lui-même sont de la première puissance, ou finis.

Si P est tel que son premier dérivé soit de la première puissance, il existe des nombres α de la première ou de la deuxième classe, tels que : $P^{(\alpha)} \equiv 0$, et de tous ces α il y en a un qui est le plus petit.

Théorèmes d'Ivar Bendixson :

Si P' a une puissance supérieure à la première, il existe toujours des points qui appartiennent à la fois à tous les $P^{(\gamma)}$ (γ parcourant la 1re et la 2e classe).
L'ensemble P^{Ω} de tous ces points est un ensemble parfait (Ω 1er nombre de la 3e classe).
Si $P' - P^{\Omega} \equiv R$, R a la première puissance.
Il existe un nombre γ de la 1re ou de la 2e classe, tel que : $\mathfrak{D}(R, R^{(\gamma)}) \equiv 0$.

Désignons par α l'un quelconque des symboles

$$\omega,\ \omega+1,\ \ldots\ldots\quad \lambda_n\omega^n+\ldots+\lambda,\ \ldots\ldots,\ \omega^\omega,\ \ldots\ldots$$

que M. Cantor appelle des *symboles d'infini* ; on comprend sans autre explication ce qu'il faut entendre par un symbole d'infini qui en précède un autre. Dans la théorie des ensembles, ces symboles ont un sens très-précis et il semble difficile d'élever qque objection contre leur introduction. Mais l'auteur veut les séparer de la théorie qui leur a donné naissance, de la même façon que, pour arriver à la notion de nombre entier, on fait abstraction de la nature des groupes d'objets que ces nombres peuvent servir à comparer. Ces symboles d'infini, M. Cantor les regarde comme des *nombres entiers* ; ainsi ω sera dit un nombre entier immédiatement supérieur à tous les nombres de la suite naturelle $1, 2, 3, \ldots\ldots n, \ldots\ldots$ En partant ensuite du nombre ω, on forme la nouvelle suite de nombres entiers consécutifs

$$\omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3,\ \ldots\ldots$$

et 2ω est regardé comme un nombre entier immédiatement supérieur aux nombres de cette suite, etc. Ces dénominations choquent sans doute les habitudes ; mais, après tout, il n'y a peut être pas lieu de s'arrêter à la répugnance que peut nous causer l'emploi inusité de tel ou tel vocable, et de reprocher à l'auteur d'avoir substitué à cette expression « symbole d'infini » le mot de « nombre » ~~et~~ ou de dire « nombre plus petit qu'un autre » au lieu de « symbole d'infini précédant un autre symbole. »



Bulletin des sciences mathématiques, 1884 (2e série, tome VIII) J. Tannery.

Georg Cantor: Sur une propriété de l'ensemble de tous les nombres algébriques réels, ap. Journal de Crelle (Borchardt), t. 77. Berlin, 1874.

§ 2.

Etant donnée suivant n'importe quelle loi une suite infinie de nombres réels différents:

(4) $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_\nu, \dots$

on peut dans tout intervalle $(\alpha \dots \beta)$ donné d'avance, trouver un nombre η qui ne se trouve pas dans la suite (4), et par suite une infinité de tels nombres.

Pour le démontrer, nous partons de l'intervalle $(\alpha \dots \beta)$, qui nous est donné d'avance à volonté, et soit $\alpha < \beta$. Les deux premiers nombres de notre suite (4) qui tombent à l'intérieur de cet intervalle (à l'exclusion des bornes), seront désignés par α', β'; soit $\alpha' < \beta'$. De même, qu'on désigne par $\alpha'' \beta''$ les deux premiers nombres de notre suite qui tombent à l'intérieur de $(\alpha', \dots \beta')$, et soit $\alpha'' < \beta''$; qu'on forme suivant la même loi un intervalle suivant $(\alpha''' \dots \beta''')$ etc. Par définition, les nombres $\alpha' \alpha'' \dots$ sont des nombres déterminés de notre suite (4), dont les indices vont toujours en croissant; de même pour les nombres $\beta' \beta'', \dots$ De plus, les nombres $\alpha', \alpha'', \dots$ vont constamment en croissant, et les nombres $\beta', \beta'', \dots$ en décroissant; chacun des intervalles $(\alpha \dots \beta), (\alpha' \dots \beta') (\alpha'' \dots \beta'') \dots$



renferme tous ceux qui le suivent. Deux cas peuvent alors se présenter:

Ou bien le nombre des intervalles ainsi formés est fini; soit $(\alpha^\nu \dots \beta^\nu)$ le dernier d'entre eux. Comme à son intérieur peut se trouver au plus un seul nombre de la suite (4), on peut prendre dans cet intervalle un nombre η, qui n'est pas contenu dans (4), et par là le théorème est démontré pour ce cas.

Ou bien le nombre des intervalles formés est infini; alors les grandeurs $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ qui vont constamment en augmentant, sans croître à l'infini, ont une limite déterminée α^∞; de même pour les grandeurs $\beta, \beta', \beta'', \dots$ qui ~~décroissent~~ vont constamment en décroissant, et soit β^∞ leur limite. Si $\alpha^\infty = \beta^\infty$ (cas qui se présente toujours dans l'ensemble de tous les nombres algébriques réels), on se convainc aisément en se reportant à la définition des intervalles que le nombre $\eta = \alpha^\infty = \beta^\infty$ ne peut être contenu dans notre suite (1); si au contraire $\alpha^\infty < \beta^\infty$, alors tout nombre η pris ~~à l'intérieur~~ dans l'intervalle $(\alpha^\infty \dots \beta^\infty)$ (y compris ses bornes) satisfait à la condition de n'être pas contenu dans la suite.

(1) Si le nombre η était contenu dans notre suite, on aurait $\eta = \omega_p$, où p est un indice déterminé; mais ce n'est pas possible, car ω_p ne se trouve pas à l'intérieur de l'intervalle $(\alpha^p \dots \beta^p)$, tandis que le nombre η se trouve par définition à l'intérieur de cet intervalle.

Berlin, le 23 décembre 1873.

Table des mémoires de Cantor,
traduits dans le tome II des *Acta mathematica*.



Cantor



Georg Cantor : Sur les ensembles de points linéaires infinis.
(à suivre) (Mathematische Annalen, t. XXIII, Halle 1883.
p. 453.
(suite de l'article du t. XXI, p. 545.)

~~Complément des Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre~~

§15. Soit H une partie à n dimensions d'un espace plan, continu, à n dimensions G_n ~~(pouvant être pris pour H)~~ (H peut être G_n tout entier); soit P un ensemble de points contenu dans H. Si l'on partage H en un nombre fini ou infini de parties séparées, connexes à n dimensions:

$H_1, H_2, \ldots H_\nu, \ldots$

(dont l'ensemble est de la première puissance au plus) de telle sorte que chaque point de H appartienne à une seule partie H_ν; l'ensemble P se trouve divisé en ensembles partiels:

$P_1, P_2, \ldots P_\nu, \ldots$

respectivement contenus dans $H_1, H_2, \ldots H_\nu \ldots$

Désignons maintenant par Υ une propriété quelconque d'un ensemble de points dans G_n, vérifiant les 2 hypothèses suivantes:

1° Si P est un ensemble contenu dans une partie entièrement finie H de l'espace G_n, qui possède la propriété Υ, et si l'on partage H en un nombre fini de domaines partiels:

$H_1, H_2, \ldots H_{m-1}, H_m$

contenant les ensembles partiels correspondants (parties de P):

$P_1, P_2, \ldots P_{m-1}, P_m$

la propriété Υ appartient au moins à l'un de ces derniers.

2° Si P est un ensemble de points qcq dans G_n, et Q un autre ensemble qcq n'ayant aucun point commun avec P, possédant la propriété Υ, l'ensemble P + Q possède aussi la propriété Υ.



Exemple d'une propriété X : nombre infini des points de l'ensemble (ou seconde puissance, etc.

Théorème I. Si H est une partie à n dimensions de G_n située tout entière dans le fini, et si P est un ensemble de points contenu dans H et possédant la propriété X, il y a au moins un point g de H tel, que si K_n est une sphère pleine à n dimensions de centre g, la partie de P qui tombe dans le domaine K_n possède toujours la propriété X, si petit que soit le rayon de la sphère pleine K_n.

[Démonstration analogue à celle du théorème de Weierstrass.]

Cette méthode de démonstration a été employée par Lagrange, Legendre, Dirichlet, Cauchy (Cours d'Analyse, note III), Weierstrass et Bolzano. — Elle a été en butte à des critiques sophistiques semblables à celles que Zénon d'Elée a dirigées contre la possibilité du mouvement ou de la pluralité, et à celles par lesquelles le chevalier de Méré a dégoûté Pascal des mathématiques.

Le nombre d'un ensemble infini ~~change quand on~~ de la première puissance peut devenir tout nombre α de la 2e classe en changeant l'ordre de ses éléments sans changer son contenu.

Un ensemble bien ordonné, quand on le transforme, peut changer de nombre, mais non de puissance.

Un ensemble de la seconde puissance peut être mis sous la forme bien ordonnée :

$\varphi_\omega, \varphi_{\omega+1}, \dots \varphi_\alpha, \dots$ (α = success. tous les n. de la 2e cl.)

Il a alors pour nombre Ω, le 1er nombre de la 3e classe.

Mais on peut, en changeant l'ordre de ses éléments, rendre son nombre égal à un nombre qcq. A de la 3e classe ; et cela d'une infinité de manières.

Les seules transformations d'un ensemble bien ordonné qui laissent son nombre invariable sont celles qui peuvent se ramener à un nombre fini ou infini de transpositions, c.à.d. de permutations de deux éléments (1)

Théorème II. Si un ensemble de points répandu dans l'espace infini G_n est ~~tel~~ que, si H est une partie de G_n située tout entière dans le fini, la partie de P qui appartient à H est finie ou de la première puissance, P est aussi de la première puissance (à moins qu'il ne soit fini). (cf. t. XX [G].)

Théorème III. Soit Q un ensemble de points qcque dans G_n; Q' son premier dérivé, et R un ensemble de points n'ayant aucun point commun avec Q et Q', et de plus tel, que, si H est une partie continue qcque de G_n ne contenant aucun point de Q ni de Q', la partie de R qui appartient au domaine H ~~est~~ soit finie ou de la première puissance, R lui même est fini ou de la première puissance.

§ 16. Théorème A. Un ensemble de points P contenu dans un domaine continu à n dimensions G_n ne peut jamais être parfait, s'il est de la première puissance.

Théorème B. Si α est un nombre qcque de la 1e ou de la 2e classe, et si P est un ensemble de points de G_n tel que l'on ait :

$$P^{(\alpha)} \equiv 0,$$

P' et P sont de la première puissance (à moins qu'ils ne soient finis.)

– La considération des dérivés d'ordres successifs d'un ensemble de points, si importante pour rechercher la nature de cet ensemble ne s'arrête nullement aux dérivés d'ordre fini ν (ν étant un nombre entier fini, de la 1e classe); au contraire il est en général

(1) Il s'ensuit qu'un ensemble fini a toujours le même nombre (Anzahl) car toute transformation de cet ensemble se ramène à une suite de permutations (cf Helmholtz Zählen und Messen) L.C.



nécessaire de prendre encore en considération les ensembles dérivés de P dont l'ordre est caractérisé par des nombres transfinis de la 2e, de la 3e... classe.

Mais dans cette étude des propriétés des ensembles infinis, seuls jouent un rôle les dérivés dont le numéro d'ordre appartient à la 1e ou à la 2e classe. En effet, on démontre ce fait extrêmement remarquable, que pour tout ensemble de points P, à partir d'un certain numéro d'ordre α appartenant toujours à la 1e ou à la 2e classe, ~~tou~~ l'ensemble dérivé $P^{(\alpha)}$ est ou nul ou parfait : de sorte que tous les ensembles dérivés d'ordre supérieur sont identiques à P^{α}, et que leur considération devient par suite superflue.

Théorème C. Si P est un ensemble de points situé dans G_n, et tel que son premier dérivé P' soit de la première puissance, il y a toujours des nombres γ de la 1e ou de la 2e classe tels que P^{γ} soit nul, et parmi tous ces nombres γ il y en a un, α, qui est le plus petit.

Théorème D. Si P est un ensemble de points situé dans G_n et tel que son premier dérivé P' ait une puissance supérieure à la première, il y a toujours des points communs à tous les dérivés P^{α} (α étant un n. qcque de la 1e ou de la 2e classe), et l'ensemble de ces points, qui n'est autre que P^{Ω}, est toujours un ensemble parfait.

Démonstration par le théorème I et le théorème B.
Soit S l'ensemble des points communs à tous les dérivés P^{α}, c.à.d. P^{Ω} : tout point s de S est un point limite de S, et comme d'ailleurs (propriété générale) tout point limite s' de S appartient à S, S est un ensemble parfait.

Théorème E. Si P est un ensemble de points situé dans G_n, et tel que son premier dérivé P' ait une puissance supérieure à la première; soit d'autre part S le dérivé P^{Ω}, dont l'existence résulte du th. D; la différence :

$$R \equiv P' - S$$

est toujours un ensemble de points de la première puissance au plus et par conséquent on peut toujours, et d'une seule manière, partager P' en deux parties R et S, telles que :

$$P' \equiv R + S$$

où S est un ensemble parfait, et R un ensemble fini ou de la première puissance.

Démonstration par le théorème III et le théorème D.

Théorème F. Si P est un ensemble de points qcque dans G_n, tel que son premier dérivé P' ait une puissance supérieure à la première, il y a toujours un nombre minimum α appartenant à la 1e ou à la 2e classe, tel que :

$$P^{\alpha} \equiv P^{\alpha+1}$$

et par conséquent le dérivé d'ordre α de P, c à d P^{α}, est égal à l'ensemble parfait :

$$P^{\Omega} \equiv S.$$

M Ivar Bendixson, de Stockholm, a remarqué que, de ce que R est une partie intégrante de P' et possède la première puissance, il ne s'ensuit pas (comme l'avait cru Cantor) que R soit le dérivé d'une certaine partie intégrante de P; et il a démontré le :

Théorème G. Si R est l'ensemble de la première puissance défini dans le th. E, il y a un nombre minimum α de la 1e ou de la 2e classe, tel que :

$$\mathfrak{D}[R, R^{\alpha}] \equiv 0.$$

et ce nombre minimum α est le même que celui du théorème F.



6

p. 27. On a remarqué (mém. II, F) que si P^ω est nul, il y a déjà un nombre fini ν pour lequel P^ν est nul. Plus généralement :
Si β est un nombre de la seconde classe et de la seconde espèce (càd. décomposable en 2 facteurs dont le multiplicande est ω) et si P est un ensemble de points tel que P^β est nul, il y a toujours des nombres β' plus petits que β, appartenant à la 1e ou à la 2e classe, pour lesquels on a aussi :

$$P^{\beta'} \equiv 0.$$

Corollaire. Le nombre α désigné dans le th. C est toujours de première espèce.

§ 17. On écrira dans tous les cas :

$$P_1 + P_2 + P_3 + \ldots \equiv \mathfrak{M}(P_1, P_2, P_3, \ldots)$$

en convenant que si les ensembles additionnés ont des points communs, ces points ne figurent qu'une fois dans leur somme (qui est alors identique à leur plus petit commun multiple)
De l'égalité :
$$P \equiv P_1 + P_2 + P_3 + \ldots$$
on ne peut tirer celle-ci :
$$P - P_1 \equiv P_2 + P_3 + \ldots$$
que si P_1 n'a ~~aucun~~ point commun avec $P_2, P_3, \ldots$
Si la somme contient un nombre fini d'ensembles, on peut appliquer à la dérivation la formule distributive :

$$(P_1 + P_2 + \ldots + P_n)^\alpha \equiv P_1^\alpha + P_2^\alpha + \ldots + P_n^\alpha$$

Un ensemble est dit fermé quand il contient son dérivé, càd. que :
$$\mathfrak{D}(P, P') \equiv P'$$
[Exemple : l'ensemble des points singuliers d'une fonction analytique d'une variable complexe]
Tout ensemble P donne naissance à l'ensemble fermé :

$$\mathfrak{M}(P, P') = P + P'$$

[Les th. C et E sont vrais, de tout ensemble fermé (car un tel ensemble a au moins la puissance de son dérivé.) ~~sans condition~~

Tout ensemble dérivé d'un autre ensemble est, comme on sait, un ensemble fermé ; réciproquement, tout ensemble fermé peut être considéré d'une infinité de manières comme le premier dérivé d'un autre ensemble.

Un ensemble est dit <u>condensé en soi</u> s'il est contenu dans son dérivé, c.à d. si : $$\mathfrak{D}(P, P') \equiv P.$$

Le premier dérivé d'un ensemble condensé en soi est un ensemble parfait.

Un ensemble dont aucune partie intégrante n'est condensée en soi s'appelle un ensemble <u>séparé</u>.

Les ensembles isolés sont une espèce d'ensembles séparés.

Les ensembles fermés de la première puissance sont séparés (car ils sont réductibles, en vertu du th. C.). Sont également séparés tous les ensembles de la première puissance désignés par R dans les théorèmes E et G.

Quel que soit P, l'ensemble $P - \mathfrak{D}(P, P^{\Omega})$ est un ensemble séparé, de la première puissance (Théorème III.)

Distinction des termes « condensé en soi » et « partout condensé dans un domaine donné » : un ensemble peut être condensé en soi, sans être partout condensé dans un domaine qcq H, partie de G ; et inversement, un ensemble peut être partout condensé dans un domaine H sans être condensé en soi (s'il a des points hors de H.) Si au contraire l'ensemble P est contenu dans le domaine H et y est partout condensé, il est aussi condensé en soi.

§18. Définition de l'étendue (contenu ou volume) d'un ensemble de points qcque (continu ou non) par rapport à sa participation à l'espace plan à n dimensions G_n. C'est un nombre non négatif égal à l'intégrale $\int dx_1 dx_2 \dots dx_n$

étendue à tous les éléments de la partie de l'espace G_n occupée par P (dans le cas où P se compose de fragments à n dimensions de G_n) Mais ~~ce~~ l'étendue a encore un sens déterminé et une valeur unique dans d'autres cas. On la représente en gén. par $I(P \text{ in } G_n)$

On arrive à généraliser la notion d'étendue en considérant une fonction de la variable positive ρ, qu'on appelle fonction caractéristique de l'ensemble P par rapport à G_n, et qu'on écrit:

$$F(\rho, P \text{ in } G_n)$$

Soit un ensemble P situé tout entier dans le fini de G_n. Considérons l'ensemble fermé: $\mathfrak{M}(P, P') \equiv P + P'$ et ~~decri~~ entourons chacun de ses points p d'une sphère à n dim. de ray. ρ; l'ensemble des points de cette sphère sera désigné par: $K(p, \rho)$

L'ensemble de ces sphères a un plus petit commun multiple: $\Sigma K(p, \rho)$ qu'on désigne par: $\Pi(\rho, P \text{ in } G_n)$

Cet ensemble $\Pi(\rho)$ est composé d'un nombre fini de parties de G_n, dont chacune est un continu à n dim. comprenant sa frontière. – L'intégrale $\int dx_1 dx_2 \dots dx_n$

étendue à tous les éléments de l'espace $\Pi(\rho)$ a une valeur déterminée, qui dépend de ρ: $F(\rho)$; telle est la fonction caractéristique de l'ensemble P par rapp. à G_n:

$$F(\rho, P \text{ in } G_n) = \int_{\Pi(\rho, P \text{ in } G_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

$F(\rho)$ est une fonction continue de ρ, qui diminue avec ρ;

La valeur-limite bien déterminée : $\lim_{\rho=0} F(\rho)$
est par définition l'étendue de l'ensemble P par rapport à G_n.
On écrit : $$I(P \text{ in } G_n) = \lim_{\rho=0} F(\rho, P \text{ in } G_n)$$
Théorème fondamental :
L'étendue d'un ensemble P est toujours égale à l'étendue de son dérivé P' par rapport au même espace G_n ; c.à.d. :
$$I(P \text{ in } G_n) = I(P' \text{ in } G_n)$$
Corollaire : Soit P un ensemble quelconque dans G_n, et γ un nombre quelconque de la 1re ou de la 2e classe, on a toujours :
$$I(P \text{ in } G_n) = I(P^\gamma \text{ in } G_n)$$
I. Si P est un ensemble réductible son étendue est nulle.
En effet, il y a un nombre α de la 1re ou de la 2e classe pour lequel on a : $$P^\alpha \equiv 0$$
Donc : $$I(P) = I(P^\alpha) = 0.$$
(démontré pour les ensembles linéaires réductibles, mém. IV [H].)
II. Si P n'est pas réductible, il y a toujours un ensemble parfait S qui a la même étendue que P, c.à.d. :
$$I(P \text{ in } G_n) = I(S \text{ in } G_n)$$
Cet ensemble S est l'ensemble défini par les théorèmes E et F.
Conséquence : La détermination de l'étendue d'un ensemble quelconque revient toujours à la recherche de l'étendue d'un ensemble parfait.
Un ensemble parfait peut avoir une étendue nulle, s'il n'est partout condensé dans aucune partie à n dim. de G_n.
Exemple d'ensembles linéaires parfaits d'étendue nulle (mém. V, K)
[note 11 des Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre.]
Si un ensemble est partout condensé dans un domaine à n dim. il a une étendue non nulle (positive)



Au contraire, il y a des ensembles parfaits qui ne sont partout condensés dans aucun domaine à n dimensions, si petit qu'il soit, et dont l'étendue n'est cependant pas nulle.

Si $\varphi(x_1 x_2 \dots x_n)$ est une fonction intégrable sans conditions, si P est un ensemble de points quelconque situé tout entier dans le fini de G_n, et si $\Pi(\rho, P \text{ in } G_n)$ est la partie d'espace définie ci-dessus, l'intégrale :

$$\int_{\Pi(\rho,\, P \text{ in } G_n)} \varphi(x_1, x_2, \dots x_n)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_n$$

représente une fonction continue de ρ, ~~qui~~ dont la limite pour $\rho = 0$ est un nombre qui dépend de P et de la fonction φ, que l'on peut écrire :

$$I[\varphi(x_1 x_2 \dots x_n), P \text{ in } G_n] \quad \text{ou} \quad I(\varphi, P)$$

L'étendue de l'ensemble P est un cas particulier de cette intégrale, car :

$$I(P) = I(1, P)$$

§ 19. Étude des ensembles parfaits (bornés, fermés et complets)

Les continus sont des ensembles parfaits et connexes (zusammenhängend). Tous les autres continus, dits semi-continus, peuvent être obtenus par l'addition ou la soustraction des ensembles parfaits et des ensembles finis ou de la première puissance, de sorte que l'étude des ensembles continus doit précéder celle des semi-continus.

Tous les ensembles ~~continus~~ parfaits sont de la puissance d'un intervalle linéaire continu, tel que : $(0 \leq x \leq 1)$

Théorème. Soit un ensemble linéaire parfait S contenu dans l'intervalle $(0, 1)$ et qui n'est partout condensé dans aucun intervalle si petit qu'il soit ; cet ensemble a la même puissance que le continu linéaire $(0, 1)$.

Corollaire. Comme tout ensemble linéaire parfait qui n'est condensé dans aucun intervalle peut se ramener par projection à l'ensemble S, le théorème est vrai de tous ces ensembles.

On démontre ~~ensuite~~ en général que tout ensemble linéaire parfait a la même puissance que le continu linéaire (0, 1).

On étendra ensuite cette proposition aux ensembles parfaits à n dimensions.

Théorème. Un ensemble de points infini, linéaire et ~~parf~~ fermé a, soit la première puissance, soit la puissance du continu linéaire ; ~~il~~ peut donc se mettre, soit sous la forme $F(\nu)$, où ν est une variable finie entière illimitée, soit sous la forme $F(x)$, où x est une variable réelle dans l'intervalle (0, 1).

On étendra cette proposition aux ensembles non fermés linéaires, puis à tous les ensembles à n dimensions (cf. mémoire B.) p-18.

On en conclura que le continu linéaire a la puissance de la 2e classe de nombres (par le théorème du t. XXI, p. 582.) mém. K. p. 48.



Georg Cantor: Ueber verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punctmengen in einem n-fach ausgedehnten stetigen Raum G_n. (Acta mathematica, t. VII.) (suite aux art. des Acta mathematica, t. II.) Halle, 1885.

§1. Rappel des définitions et des théorèmes I, II, III, D, E, F, G, H contenus dans l'art.: Mathematische Annalen, t. XXIII. (1)

Théorème H. Si P est un ensemble de points fermé quelconque on a toujours:
$$P = R + S$$
où R est un ensemble séparé de la première puissance au plus, et S un ensemble parfait ou nul. Si P est fini ou de la première puissance, S est nul; on a donc à partir d'un nombre α de la 1e ou de la 2e classe (et de la 1e espèce): $P^\alpha = 0$.

Si P a une puissance supérieure à la première, S est un ensemble parfait (donc de la seconde puissance), et l'on a à partir d'un nombre α de la 1e ou de la 2e classe:
$$P^\alpha = P^{\alpha+1} = \dots = P^\Omega = S$$
tandis que:
$$\mathfrak{D}(R, R^\alpha) = \mathfrak{D}(R, R^\Omega) = 0.$$

On va étendre ces théorèmes à des ensembles qcques (non fermés.)

§2. Définition. Si un ensemble condensé en soi est tel que la partie de cet ensemble qui se trouve dans le voisinage de chacun de ses points (c.à.d. ds une sphère ay. ce p. pr centre et un ray. suff. petit) soit toujours (c.à.d. pour tous les points) de la même puissance (la αe) on l'appelle ensemble homogène de l'ordre α.

Ainsi l'ensemble des ~~nombres rationnels~~ est un ensemble homogène de la 1e puissance; l'ensemble des nombres irrationnels est un l'ens. homogène de la puissance du continu linéaire.

Un ensemble quelconque P contient des points isolés et des points limites: soit Pa l'ensemble des premiers, Pc l'ens. des derniers:

(1) Cf. Acta mathematica, t. IV, p. 381.



$P = Pa + Pc$ Pa — adhérence de P.

$Pc = \mathcal{D}(P, P')$ cohérence de P.

Pa est un ensemble isolé (ou nul) — Toute partie de P qui est condensée en soi fait aussi partie de Pc; donc, pour que $Pc \equiv P$ (et $Pa = 0$) il faut et il suffit que P soit condensé en soi.

De même, on peut décomposer Pc en Pca et Pc^2. D'où :

$$P = Pa + Pca + Pc^2$$

et généralement : $P = Pa + Pca + Pc^2a + \ldots + Pc^{n-1}a + Pc^n$

Pc^n s'appelle la n^e cohérence de P.

Si γ est un nombre transfini de 1re espèce, on définit :

$$Pc^{\gamma} = (Pc^{\gamma-1})c.$$

Si γ est un nombre transfini de 2e espèce, on définit :

$$Pc^{\gamma} = \mathcal{D}(Pc, Pc^2, \ldots Pc^{\gamma'}, \ldots\ldots)$$

où γ' prend toutes les valeurs finies ou infinies plus petites que γ.

D'où : $$P = \sum Pc^{\gamma'}a + Pc^{\gamma}.$$

Les divers termes du second membre n'ont deux à deux aucun point commun ; chaque terme $Pc^{\gamma}a$ est un ensemble isolé (sans adhérence), et leur somme un ensemble séparé (car toute partie de P condensée en soi fait partie de Pc^{γ}.)

Théorème. Si P est un ensemble séparé, il y a un nombre minimum α de la 1re ou de la 2e classe pour lequel on a :

$$Pc^{\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad Pc^{\alpha+1} = 0$$

Si au contraire P n'est pas un ensemble séparé, il y a un nombre α de même nature, pour lequel Pc^{α} est un ensemble condensé en soi, et $Pc^{\alpha+1}$ aussi.

Corollaires. 2° Un ensemble infini séparé n'a que la première puissance

1° Tout ensemble d'une puissance supérieure à la première a une partie

déterminée condensée en soi.

Théorème J. Si P est un ensemble séparé infini, il est de la première puissance, et il y a un nombre minimum ~~de la 1~~ α de la 1re ou de la 2e classe, tel que $P_c^{\alpha} = 0$

de sorte que $P = \sum_0 P_c^{\alpha'} a \qquad \alpha' = 0, 1, 2, \ldots < \alpha.$

Théorème K. Si P ~~est un~~ ensemble de la première puissance sans pourtant être un ensemble séparé, il y a un nombre minimum α ~~est~~ de la 1re ou de la 2e classe, tel que P_c^{α} est un ensemble homogène du 1er ordre; appelons-le U, et posons:

$$R = \sum_0 P_c^{\alpha'} a \qquad \alpha' = 0, 1, 2, \ldots < \alpha,$$

on a alors: $P = R + U$ et $\mathfrak{D}(R, U') = 0$.

Théorème L. Si P est un ensemble d'une puissance supérieure à la première, il y a un nombre minimum α de la 1re ou de la 2e classe, tel que P_c^{α} est un ensemble condensé en soi, et cet ensemble comprend 2 parties: l'une, V, est condensée en soi, et contient tous les points de P dans le voisinage desquels se trouvent des parties de P d'une puissance supérieure à la première; l'autre, U, comprend tous les autres points de P_c^{α} et forme un ensemble homogène du 1er ordre; et si l'on pose: $R = \sum_0 P_c^{\alpha'} a$, R est un ensemble séparé (ou nul), et l'on a:

$$P = R + U + V$$

$$\mathfrak{D}(R, U') = 0, \quad \mathfrak{D}(R, V') = 0, \quad \mathfrak{D}(U, V') = 0.$$

§3. Définitions: R s'appellera le reste ou résidu de P: P_r.

$$P_r = \sum P_c^{\alpha'} a \qquad \alpha' = 0, 1, 2, \ldots < \alpha.$$

$U + V$ est l'inhérence totale de P: P_i: $P = P_r + P_i$.

$$P_i = P_c^{\alpha} = P_c^{\Omega}.$$

V s'appelle l'inhérence du premier ordre ou la première inhérence de P: P_{i_1}.



Quand nous aurons prouvé qu'il ne peut exister dans G_n un ensemble d'une puissance supérieure à la seconde, il en résultera que V est un ensemble homogène du deuxième ordre.

A chaque point $\underline{v}$ de V correspond un nombre entier fini ou transfini β, tel que la partie de V qui se trouve ds le voisinage de $\underline{v}$ ait la β^e puissance [c.à.d. pour des valeurs suffis. petites de ρ rayon d'une sphère décrite du pt $\underline{v}$ comme centre dans G_n.]
On dit alors que le point $\underline{v}$ est un point plein de l'ordre β de V ou de P.
L'ensemble des points d'ordre β de V ~~forme~~ est homogène d'ordre β; on l'appelle inhérence d'ordre β ou β^e inhérence de P: P_{i_β}

$$V = \Sigma P_{i_\beta} \qquad \beta = 2, 3, \ldots\ldots$$

Or: $P_i = P_c^\Omega = V + \mathcal{V}$, $\qquad \mathcal{V} = P_{i_1}$ $\quad$; donc

$$P_i = \Sigma P_{i_\beta} \qquad \beta = 1, 2, 3, \ldots\ldots$$

$$\mathfrak{D}(P_a, P_c) = 0 \quad , \quad \mathfrak{D}(P_a, P_a') = 0 \qquad \mathfrak{D}(P_a, P_c') = 0$$

~~Les~~ P_a comprend tous les points isolés de P; on les appellera points de 0e espèce; P_{ca} comprend tous les points isolés de P_c, on les appellera points de 1e espèce, et ainsi de suite. En général, les points de l'ensemble isolé $P_{c^\alpha a}$ s'appelleront points de α^e espèce.
Formule générale:

$$P = \Sigma P_{c^{\alpha'} a} + \Sigma P_{i_\beta}$$
$$\alpha' = 0, 1, 2, \ldots < \alpha \qquad \beta = 1, 2, \ldots\ldots$$

Tout point de P est, ou un point de α^e espèce, ou un point d'ordre β.
P_c contient tous les points d'espèce, et P_i tous les points d'ordre

En appliquant cette théorie aux ensembles fermés, on retrouve le théorème H. Supposons que P soit un ensemble fermé :

$$\mathfrak{D}(P, P') = P'$$

On a alors : $P_c = P'$ et en gén : $P_{c^\gamma} = P^\gamma$

D'autre part : $P_{c^\gamma a} = P^\gamma - P^{\gamma+1}$ $(P^0 = P)$

Enfin ! $P_i = P_{c^\Omega} = P^\Omega$.

P^Ω est ou nul, ou condensé en soi ; comme d'autre part c'est un ensemble fermé, c'est un ensemble parfait (ou nul). P_i étant un ensemble parfait, la partie de P_i qui se trouve dans le voisinage d'un point qcque de P_i ne peut être de la première puissance ~~mais doit~~ d'une puissance supérieure ; donc :

$P_{i_1} = V = 0$ $\quad$ $P_i = V$

Tout ensemble fermé de la première puissance est un ensemble séparé.

Application à la physique mathématique.

Pour arriver à une explication satisfaisante de la nature il faut supposer les éléments simples et ultimes de la matière en nombre actuellement infini, et absolument inétendus ou strictement ponctuels (Faraday, Ampère, Wilhelm Weber, Cauchy.) — Ces éléments sont des monades ou unités à la manière de Leibniz. La physique moderne admet deux espèces de matières, la matière corporelle et la mat. éthérée, qui agissent l'une sur l'autre et permettent d'expliquer tous les phénomènes sensibles. Il faut donc concevoir deux classes de monades : les monades corporelles et les monades éthérées, comme substratum du monde sensible.



La question qui se pose alors en premier lieu est de savoir quelle est la puissance de ces deux classes. L'auteur présume que la matière corporelle a la première puissance et la matière éthérée la seconde puissance, [soit] considérées dans l'espace entier, soit dans une partie finie quelconque de l'espace.

A chaque instant, la matière corporelle formerait un ensemble de points de la première puissance de la forme :

$$P = Pr + Pi_1$$

Pr étant un ensemble séparé, et Pi_1 un ensemble homogène du premier ordre.

La matière éthérée formerait de autre part un ensemble de points de la seconde puissance de la forme :

$$Q = Qr + Qi_1 + Qi_2$$

Gutberlet (Constantin): das Problem des Unendlichen
ap. Zeitschrift für Philosophie ... t. 88, p. 179-223 (1886)

L'auteur paraît très inquiet pour l'infinité de Dieu et ne paraît pas rassuré par la réponse de Cantor, qui place l'Absolu au-dessus du transfini.

I. Résumé des travaux de Cantor. (Cf. une critique de Cantor par Kerry ap. Vierteljahrschrift für wissensch. Phil. IX, 2.) (V. aussi une critique au point de vue d'Herbart (die wandelbare Grenze) ap. Zeitschrift für exacte Philosophie, t. 22, p. 389.)

Selon Gutberlet, « l'infini potentiel réclame une infinité actuelle. Car il ne serait pas possible d'avancer sans cesse après chaque progrès, s'il ne se trouvait ~~devant~~ après toute grandeur finie une infinité actuelle »

« L'infini n'a pas besoin de la succession pour se poser. »

II. Cf. Isenkrahe ap. Zeitschrift für Phil. t. 86, p. 73 et 145. Ce pasteur veut démontrer que l'infini actuel est contradictoire en concept, afin d'établir la nécessité de la création du monde. Discussion sur St Thomas d'Aquin.

Il n'y a pas d'inconséquence à admettre une infinité de choses possibles et non une infinité de choses réelles; car tout ce qui est possible à la fois ~~n'est pas~~ ne peut être à la fois réel (ex. repos et mouvement).

Gutberlet n'admet pas l'objection d'Isenkrahe: « Que les choses nombrées soient possibles ou réelles, cela ne change rien à leur nombre » Il soutient que l'infini actuel est impossible (ex. du fil coupé au milieu) sans qu'il s'ensuive que la grandeur infinie possible soit absurde: car dans le domaine du possible (de la géométrie pure) il n'y a pas de mouvement à proprement parler. L'espace (lieu des possibles) est immuable: seules les choses réelles peuvent se mouvoir dans l'espace.

Isenkrahe distingue la limite (borne extérieure) et la fin (dernier élément de la grandeur) et soutient que la limite n'est pas infinie.

— -- . . .



Gutberlet soutient contre Isenkrahe que Dieu peut et doit connaître une suite infinie dans l'espace ou dans le temps (un mouvement, par. ex.) Dieu connaît-il tous les chiffres décimaux de π?

L'argument « Toute grandeur est multipliable à l'infini ou » ne vaut rien. — Exiger que le nombre ~~figure~~ exprime exactement tous les rapports, c'est exclure le nombre irrationnel et le nombre complexe.

Argument de Tongiorgi : « Si une ligne est actuellement infinie, des points les uns sont dans le fini, les autres à l'infini. Quel est le point qui sépare ces deux espèces de points ? » D'où il conclut qu'il ne peut y avoir passage du fini à l'infini, et vice versa.

Argument d'Isenkrahe : Soit une ligne droite infinie dans les deux sens. Un p. A de cette droite est son milieu, ou non. Les deux parties infinies de la droite sont égales ou inégales ; mais en réalité, elles sont à la fois égales et inégales ; ou encore, elles ne sont ni égales ni inégales. Ne veut rien, comme le montre Gutberlet.

Ou bien l'on doit admettre la grandeur actuellement infinie et divisée à l'infini, ou bien il faut renoncer à admettre l'intelligence infinie de Dieu ; car Dieu pense actuellement tout ce qu'il peut penser ; donc s'il ne pense pas actuellement l'infini et la division à l'infini, il ne peut penser que le fini et qu'une division finie, c.à.d. que son esprit est plus borné que celui de l'homme, qui possède du moins l'idée d'infini.

— En math. on admet toujours qu'une série ou une fraction périodique restent infinies quand on supprime un nombre fini de termes en tête. Exemple d'une racine périodique : $x = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}}}}$

En vertu de ce principe, on peut l'interrompre à n'importe quel terme et poser le reste $= x$: $x = \sqrt{2+x}$

On trouve ainsi la valeur $x = 2$. $x = \sqrt{2+\sqrt{2+x}}$, etc.

Isenkrahe trouve que les différentielles n'expriment que des approximations, et que les équations différentielles ne sont jamais que des égalités imparfaites. Gutberlet répond que les mathématiciens ont des méthodes d'approximation, mais que les équations différentielles sont exactes et conduisent à des résultats rigoureux.

Georg Cantor : Sur les différents points de vue relatifs à l'infini actuel.
(Extrait d'une lettre à M Eneström de Stockholm, 4 nov. 1885.)

L'Abbé Moigno : « Impossibilité du nombre actuellement infini ; la science dans ses rapports avec la foi. » Gauthier Villars, 1884.

Cauchy : Sept leçons de physique générale, Gauth. Villars 1868.

le P. Gerdil : Essai d'une démonstration mathématique contre l'existence éternelle de la matière et du mouvement, déduite de l'impossibilité démontrée d'une suite actuellement infinie de termes soit permanents, soit successifs.
(ap. Opere edite ed inedite del cardinale Giacinto Sigismondo Gerdil, t. IV, p. 261 ; Rome, 1806.)

id : Mémoire de l'infini absolu considéré dans la grandeur (ibid. t. V, p. 1 ; Rome, 1807)

Tongiorgi : Institutiones philosophicæ, t. II, l. 3, a. 4, pr. 10.
« Multitudo actu infinita repugnat. »

Chr. Sigwart : Logik, t. II, p. 47. Tubingue, 1878.

K. Fischer : System der Logik und Metaphysik, oder Wissenschaftslehre, p. 275, Heidelberg, 1875.

Constantin Gutberlet : das Unendliche metaphysisch und mathematisch betrachtet, p. 9. Mayence, 1878.

Correspondance entre Gauss et Schumacher, 12 juillet 1831 : Gauss se prononce contre toute introduction de l'infini actuel dans la mathématique.

Pascal, Œuvres complètes, t. I, p. 302-303, Hachette, 1877.

Logique de Port Royal, 4e partie, chap. 1.



G. Cantor ipse: Ueber verschiedene Theoreme aus der Theorie der Punktmengen ap. Acta mathematica t. VII p. 123.

le P. Boscovich: Theoria philosophiae naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium (Venetiis, 1763.)

A. M. Ampère: Cours du Collège de France 1835-6.

de Saint-Venant: Mémoire sur la question de savoir s'il existe des masses continues, et sur la nature probable des dernières particules des corps (ap. Bulletin de la Société philomathique de Paris, 20 janv. 1844; cf. ~~Mémoires~~ Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 2e année)

H. Lotze: Mikrokosmos, t. I.

G. Th. Fechner: Ueber die physikalische und philosophische Atomenlehre, Leipzig, 1864.

Ch. Renouvier: Esquisse d'une classification systématique des doctrines philosophiques. t. I, p. 100. Paris, 1885.

Léon XIII: « De philosophia Christiana ad mentem Sancti Thomae Aquinatis, Doctoris Angelici, in scholis catholicis instauranda » Encyclique du 4 août 1879.

Wundt: Logik. t. II. et: Kant's kosmologische Antinomien und das Problem der Unendlichkeit, ap. Phil. Studien, t. II.

« Si les propositions de la foi ont besoin, pour les soutenir, d'une proposition aussi radicalement fausse que celle de l'impossibilité de nombres actuellement infinis (numerus infinitus repugnat) elles seraient en fort mauvaise posture, et il me paraît extrêmement remarquable que St Thomas d'Aquin, dans sa Somme théologique (I p, q 2, a 3) où il prouve par cinq arguments l'existence de Dieu, ne fasse aucun usage de cette proposition erronée. »

« Toutes les prétendues preuves de l'impossibilité de nombres actuellement infinis sont au fond vicieuses (πρωτον ψευδος) en ce qu'elles attribuent ou plutôt imposent d'avance aux nombres en question toutes les propriétés des nombres finis, pendant que d'autre part les nombres infinis, s'ils sont pensables en quelque ~~forme~~ manière, constituent nécessairement, par leur opposition aux nombres finis, une espèce de nombres toute nouvelle, dont la ~~nature~~ composition dépend complètement de la nature des choses, et non pas de notre volonté ni de nos préjugés. »

Toutes les doctrines sur l'infini actuel (I-A) peuvent se ~~classer~~ ranger en huit classes, selon qu'elles considèrent l'infini actuel :

1° in Deo extramundano aeterno omnipotente sive natura naturante, où il s'appelle l'Absolu ;

2° in concreto seu in natura naturata, où il s'appelle le Transfini ;

3° in abstracto, c.à.d. dans la connaissance humaine, où il revêt la forme des nombres transfinis ou plus génér^{t} celle des types d'ordre transfinis (ἀριθμοὶ νοητοὶ ou εἰδητικοί.)



Négligeant le premier point de vue, on peut:
1° ~~admettre~~ rejeter l'I.-A. dans le concret et dans l'abstrait:
Gerdil, Cauchy, Moigno, Renouvier; les positivistes.
2° admettre l'I.-A. dans le concret, et le rejeter de l'abstrait:
Descartes, Spinoza, Leibniz, Locke; Hermann Lotze.
3° admettre l'I.-A. dans l'abstrait, et le rejeter du concret:
une partie des néo-scolastiques.
4° admettre l'I.-A. dans l'abstrait et dans le concret:
auctor.
Ces 4 classes se dédoublent suivant qu'on rejette ou qu'on admet
l'I.-A. en Dieu.

L'infini potentiel ou syncatégorématique (Indéfini) ne
permet pas d'instituer une semblable classification, car c'est
seulement un concept de relation, une représentation auxiliaire
~~de notre esprit~~ pour la pensée, et non une idée en soi. Toutefois, c'est sous
cette forme qu'il figure dans le calcul intégral et différentiel
inventé par Leibniz et Newton, où il a prouvé sa grande valeur
comme moyen de connaissance et instrument de notre
esprit; mais il ne peut prétendre à une signification plus
étendue.

L'auteur soutient que les derniers éléments de la matière
sont inétendus, et sont des points rigoureusement géométriques:
avec Leibniz, Boscovich, Cauchy, Ampère, Saint-Venant,
Lotze et Fechner. — Mais il se sépare de Cauchy en ce qu'il
admet que ces éléments sont en nombre actuellement infini.

Separatabdruck aus Bd. 88, p. 224, der Zeitschrift für
Philosophie und philosophische Kritik.

Georg Cantor: Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten. Separatabdruck aus Bd 91, p. 81 der Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik (cf. t. 88, p. 224)

En Dieu l'infini se nomme l'Absolument infini ou l'Absolu. Dans la nature ou dans l'esprit, il est relatif, capable d'augmentation; pour marquer sa parenté avec le fini, on l'appellera Transfini.

L'auteur affirme l'existence de l'infini à ces 3 points de vue. La question de l'infini en Dieu ressort à la Théologie; celle de l'infini in concreto, à la Métaphysique; celle de l'infini in abstracto, à la Mathématique.

Tout ensemble d'objets bien distincts constitue lui-même un objet unique, dont ces objets forment les éléments ou parties. Si l'on fait abstraction de la nature propre des éléments, en conservant leur ordre, on obtient un nombre ordinal ou type d'ordre: si l'on fait en plus abstraction de leur ordre, on obtient un nombre cardinal ou une puissance (ensemble d'unités abstraites sans ordre déterminé, lequel ensemble forme un tout et une unité.)

Deux ensembles ~~peuvent avoir~~ ont le même nombre cardinal quand ils sont équivalents (1) Il n'y a pas de contradiction à ce qu'une partie intégrante d'un ensemble ait le même nombre que cet ensemble. Cette prétendue contradiction est le principal obstacle à l'admission des nombres ~~trans~~ infinis.

– Quand un ensemble est bien ordonné, le nombre idéal ou type d'ordre correspondant est proprement un nombre ordinal; c'est ce qu'on a précédemment appelé le nombre (Anzahl) d'un ensemble bien ordonné. – Deux ensembles ordonnés ont le même type d'ordre, quand ils sont semblables ou conformes.



(1) et alors seulement. | Cf. Gutberlet, Zeitschrift, t. 88, p. 183.

Les nombres cardinaux et ordinaux (puissances et types d'ordre) sont des Idées au sens de Platon, car chacun d'eux est l'unité organique d'une multiplicité d'unités.

La matière d'un type d'ordre est fournie par les unités séparées, la forme est constituée par l'ordre qui les unit en un organisme.

Euclide a conçu le nombre comme un ensemble d'unités abstraites et non comme un signe associé aux objets dans le dénombrement ; lib. VII : Μονάς ἐστιν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται, … Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.

Mais il ne fait pas suffisamment ressortir le caractère unitaire qui est essentiel au nombre.

Le nombre ne peut être conçu comme une somme d'unités, car il faut savoir combien d'unités on doit additionner, ce qui suppose le nombre (1)

On ne peut non plus ~~déduire~~ faire dépendre l'idée de nombre de l'intuition du temps (Kant) (2). La géométrie, elle aussi, a besoin du temps, pour ~~ses~~ engendrer ses idées (subjectivement).

Remarque : Ne pas confondre les nombres ordinaux de Cantor avec les nombres ordinaux vulgaires, qui sont des numéros d'ordre, et qui dérivent d'ailleurs des nombres ordinaux de Cantor.

Aussi ne faut-il pas, comme Helmholtz et Kronecker, prendre le nombre ordinal (numéro d'ordre) pour point de départ du nombre : c'est un « Hysteron Proteron » complet ! Ces deux auteurs ont poussé à l'extrême la théorie psychologique et empirique du nombre. Ils considèrent les nombres comme des signes appliqués aux objets concrets dans le processus subjectif du dénombrement, sans que ces signes se rapportent à aucune idée d'ensemble.

(2) Sir William Rowan Hamilton appelle l'Arithm. : the science of pure time.

(1) Cf. Leibniz, De arte combinatoria, Proœmium (1666).

Les théories d'Helmholtz et de Kronecker s'opposent à celle de Cantor comme le nominalisme et le conceptualisme au réalisme de Aristote. Elles se rattachent au scepticisme antique (cf. Sextus Empiricus, Hypotyposes pyrrhoniennes, III, 18.) Cf. aussi: Louis Bertrand, Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques. Genève 1778; frontispice avec cette légende: «Tu, Pastor, numeros, extense tu rationes Pandite, Venator.»

La répugnance de ces auteurs à admettre l'infini actuel se traduit par leurs efforts pour se passer du nombre irrationnel, qu'on ne peut définir qu'au moyen d'un ensemble actuellement infini de nombres. C'est ainsi que Kronecker invente des théories subsidiaires & artificielles pour rendre inutiles et superflus les nombres irrationnels, au lieu de ~~les~~ rechercher leur fondement naturel et de les expliquer naturellement. C'est l'invasion du scepticisme positiviste dans l'Arithmétique (1)

La théorie de Kronecker se rattache à tous ses travaux arithmétiques algébriques. Mais on peut douter de la possibilité de son application à la physique; ce qui est certain, c'est qu'on ne parviendra pas avec «la provision idéale de signes» qui constitue la suite naturelle des nombres, à engendrer la «provision de points actuellt infinie qui constitue le continu de l'espace et du temps (cf. Cantor, ap. Crelle, t. 77: mém. A.)

Cantor remarque enfin que la démonstration de l'invariance du nombre par Kronecker renferme une pétition de principe (2)

Objection faite à Cantor: Son transfini est toujours susceptible d'augmentation, tandis que seul l'infini absolu ne peut ni augmenter ni diminuer. Celui-ci seul est donc proprement infini, l'autre n'est qu'indéfini.



(2) Eduard Heine, dans ses Elemente der Funktionenlehre (Crelle, t. 74, 1872) a emprunté sa théorie des nombres irrationnels à G. Cantor, son ami cf. Math. Annalen, t. V, 1872 (mém. D.)

(1) Kronecker, ap. Crelle, t. 99, p. 336 [t. 92, p. 93]; Molk, ap. Acta mathematica t. VI.

I. (1) Le ~~tr~~ nombre ω (qui est le nombre ordinal correspondant à l'ensemble total des nombres entiers, c.à.d. à une suite linéaire infinie, et bien ordonnée par conséquent) n'a rien d'indéterminé, rien de variable, rien de potentiel; ce n'est pas un ἄπειρον, mais un ἀφωρισμένον; il en est de même pour tous les autres nombres transfinis. A ce titre, un nombre transfini s'oppose aux signes x, a, b du calcul littéral. — Critique de Wundt (Logique, t. II, p. 126-129) qui confond l'infini avec l'indéfini, et considère celui-ci comme une limite; et qui croit que l'indéfini seul s'applique à la nature. Au contraire, l'indéfini n'est qu'un moyen de se représenter l'infini, et il suppose ~~[illegible]~~ un infini donné, sans lequel il ne pourrait ni exister ni être pensé. — Cette distinction de l'infini et de l'indéfini remonte aux Grecs; elle a été méconnue par Kant, Herbart, les matérialistes, empiristes, positivistes, etc. Mais tous les philosophes ont manqué d'un principe de discernement dans le transfini, pour distinguer ~~tant~~ soit les puissances, soit les nombres; beaucoup ont cru que l'infini était l'indiscernable, ou le maximum absolu, qui n'est pas susceptible de détermination mathématique.

Critique d'Herbart qui conçoit l'indéfini comme une limite toujours mobile qui avance sans cesse (IV, 88.) Mais tout mouvement, toute progression suppose un chemin donné d'avance tout entier, sur lequel on peut passer. La limite mobile suppose donc un champ de variation actuellement infini, puisqu'il est fixe, sans quoi elle ne pourrait avancer indéfiniment (t. XII, p. 375. (Rép. à la critique de Ballauf ap. Zeitschrift für exacte Philosophie)

— Dans les arguments contre l'infini, on confond souvent la finité distributive (secundum partes) et la finité collective (secundum totum) par ex.: une ligne composée d'un nombre infini de points doit être infinie [fallacia secundum quid et simpliciter.]

(1) Lettre à M. Kurd Lasswitz, à Gotha (15 février 1884)

Quand on ajoute un segment fini BA à une demi-droite infinie AO, sa longueur ne change pas. Ceux qui croient trouver là une contradiction, en alléguant que la demi-droite a réellement changé, confondent la réalité substantielle du quantum avec le caractère abstrait de grandeur. La demi-droite a sans doute gagné en étendue réelle, mais ce gain est nul sous le rapport de la longueur, qui n'est qu'un accident.

— Certains arguments contre le nombre infini supposent qu'il se déduit d'un dernier nombre fini par l'addition de l'unité : or cette prémisse est fausse, attendu qu'il n'y a pas de dernier nombre fini, ni de nombre précédant immédiatement ω.

— Gutberlet (qui essaie en vain, après Leibniz, de distinguer le nombre infini et la multitude infinie, qui sont inséparables), reconnaît que l'infini potentiel suppose un infini actuel qui lui serve de base ; que l'infini potentiel ne peut exister a parte rei, et n'est qu'un ens rationis (Stoeckl).

Mais il ne faut pas dire que l'infini exclut toute possibilité d'augmentation : cela n'est vrai que de l'infini absolu, non du transfini.

La source de tous les sophismes opposés au nombre infini est dans la confusion des nombres infinis avec les nombres finis. ω est la limite (supérieure) des nombres entiers successifs, comme √2 est la limite d'une suite de nombres rationnels croissants. L'un et l'autre sont fixes, bien déterminés, et absolument en dehors des nombres variables qui s'en approchent indéfiniment ; « ω n'a pas plus de traces des nombres n qui tendent vers lui que √2 ne ressemble à aucune des fractions rationnelles d'approximation ». Les nombres transfinis sont de nouvelles irrationalités : le



même principe définit les n. irrationnels et les n. transfinis. Ces deux espèces de nombres sont analogues dans leur essence et doivent subir le même sort; les uns et les autres sont des modifications définies et déterminées (ἀφωρισμένα) de l'infini actuel.

II. (Lettre à Gutberlet, à Fulda, du 24 janvier 1886)
cf. Zeitschrift für Philosophie, t. 88, p. 199: Gutberlet das Problem des Unendlichen

Objection de Gutberlet à l'existence d'une grandeur infinie actuelle:
« Soit une ligne infinie dans les deux sens; si l'on coupe un segment fini de cette ligne, dans une région à distance finie et qu'on rejoigne les deux tronçons, les extrémités de la ligne devront reculer, et par suite ne seront plus à l'infini. Or si la ligne est finie quand on en supprime un segment fini, elle était déjà finie auparavant »

Le sophisme consiste à attribuer implicitement aux grandeurs infinies les propriétés des grandeurs finies: d'où la prétendue contradiction, qui n'est qu'un cercle vicieux. Dans une ligne finie, on ne peut tirer une extrémité sans déplacer l'autre d'autant; ~~mais~~ dans une ligne infinie, au contraire (A O) tous les points à distance finie se trouvent déplacés, mais non le point à l'infini O, qui reste à l'infini. Ce fait géométrique se traduit par l'égalité numérique: $1 + \omega = \omega$.

V. Lettre au Dr en méd. Eulenburg, à Berlin, 28 février 1886

L'infini potentiel est une grandeur finie variable, donc indéterminée. L'infini actuel est une grandeur constante plus grande que toute grandeur finie. Ex: l'ensemble des nombres entiers considéré comme un tout donné (cf. St Augustin, de Civ. Dei, XII, 19.) (cf. en opposition Origène, de principiis, trad. Rufinus, p. 244.)

[On objecte que nous ne pouvons avoir l'intuition immédiate de la suite entière: mais nous n'avons pas non plus l'intuition directe de mille millions, qui est un nombre fini. Il suffit que nous puissions avoir des nombres une connaissance discursive, pour les reconnaître, les distinguer et au besoin les construire. Or nous avons une telle connaissance des nombres transfinis aussi bien que des nombres finis tant soit peu élevés. C'est une prétention exorbitante que d'exiger des nombres transfinis une condition (l'intuition) que peu de nombres finis remplissent.

Le plus puissant argument qu'on ait dirigé contre l'existence d'une multitude infinie est celui de St Thomas d'Aquin (I, q. 7, a. 4.): «Toute multitude donnée doit correspondre à un nombre déterminé; or il n'y a que des nombres finis; donc, etc. ...»

On ne peut le réfuter que positivement en montrant qu'il y a d'autres nombres que les n. finis, c.à.d. en créant les n. transfinis.]

L'infini potentiel n'est pas à proprement parler infini: il donne l'illusion de l'infini; il en est l'image ou l'ombre; en ce sens, il le suppose et l'implique (συγκαταγορευμένως)

L'infini actuel est, soit susceptible d'augmentation (transfini) soit non susceptible d'augmentation (Infini absolu)

Le nombre ω est la limite (supérieure) des nombres entiers finis: sans doute, ils ne s'en approchent jamais (car on a toujours: $\omega - n = \omega$),



mais ω est située tout à fait en dehors de la suite ~~sans fin~~ 1, 2, 3, ...
ω n'est pas le maximum des nombres finis (qui n'existe pas) mais le minimum de tous les nombres infinis. Fontenelle (Éléments de la Géométrie de l'infini, Paris, 1727) a eu tort de vouloir trouver les nombres infinis dans la suite 1, 2, 3, ... ou à la fin d'icelle (qui n'en a pas)

VI. (Lettre à M. Weierstrass, du 16 mai 1887)

Question de l'infiniment petit actuel : il est contradictoire.

Proposition : Il n'y a aucune grandeur numérique linéaire, différente de zéro, qui soit plus petite que toute grandeur numérique donnée, si petite qu'elle soit.

On entend par gr. num. lin. une gr. représentable par un segment rectiligne fini et continu.

En effet, si l'on suppose qu'une grandeur linéaire ζ soit telle, que son multiple $n\zeta$ soit plus petit que l'unité pour tout nombre entier fini n, si grand qu'il soit, son multiple $\nu\zeta$, où ν est un nombre transfini quelconque, aussi grand qu'on voudra, ~~sera~~ encore plus petit que toute grandeur finie donnée, si petite qu'elle soit. Or cela est contradictoire avec l'essence des grandeurs linéaires, à savoir que leurs éléments sont des grandeurs linéaires, et que ~~(axiome d'Archimède)~~ ~~toute~~ grandeur linéaire est partie intégrante d'une autre finie). La grandeur ζ ne peut devenir finie, même par la multiplication actuellement infinie; elle n'est donc pas un élément de la grandeur linéaire.
Il faut donc renoncer à l'hypothèse d'une grandeur $\zeta < \frac{1}{n}$ quel que soit le nombre entier n.

« Ainsi l'existence des nombres infiniment grands actuels ~~actuellement~~ ~~infinis~~ (est si peu une raison pour qu'il existe des grandeurs infiniment petites actuelles, que c'est justement au moyen des premiers qu'on prouve l'impossibilité des dernières. »

Cf. Stolz, Math. Annalen, t. XVIII, p. 269, allgemeine Arithmetik, Ie partie)

Cf. Euclide, Eléments, livre V, déf. 4; livre X, prop. 1.
Archimède, de sphaera et cylindro, I, postulat 5;
de quadratura parabolae, préface

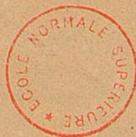
Stolz et Dubois Reymond ont essayé de créer, en supprimant l'axiome de Archimède, des grandeurs infiniment petites actuelles (moments.) Mais, d'après la proposition précédente, l'axiome de Archimède n'est pas un postulat, mais une ~~corollaire~~ conséquence ~~nécessaire~~ logiquement nécessaire du concept de grandeur linéaire.

VII. Lettre à Giulio Vivanti, à Mantoue (mai 1886.)

Confusion de l'infini actuel et de l'infini potentiel.

Poisson (Tr. de mécanique, 2e éd. t. I, p. 14) considère les différentielles comme des infiniment petits actuels. C'est une erreur qu'on évite à présent par la méthode des limites, propagée par Cauchy.

Aujourd'hui, au contraire, on évite l'infini actuel même là où bonne peut s'en passer, par ex. ds la th. des nombres irrationnels (Molk, Kronecker) — Si les grandeurs variables engendrent un infini potentiel, leur domaine de variabilité, considéré comme fixe et donné, est nécessairement un infini actuel et déterminé. — Ainsi l'infini potentiel présuppose l'infini actuel. D'autre part, si les ensembles actuellement infinis de valeurs s'introduisent nécessairement dans la Théorie des fonctions, la considération des nombres actuellement infinis, qui en découlent par un procédé régulier d'abstraction, s'impose à l'Arithmétique, de même que le concept de nombre entier fini a été tiré par abstraction de la considération des ensembles finis.



VIII. Théorie des types d'ordre et des nombres ordinaux.

Étant donné un ensemble M, on désigne son nombre ordinal ou type d'ordre par $\overline{M}$ (abstraction faite de la nature des éléments) et son nombre cardinal ou sa puissance par $\overline{\overline{M}}$ (abstraction faite, en outre, de leur ordre.) ($M \sim N$ équivaut à : $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$.

Deux ensembles équivalents ont même puissance, et réciproq^t (1)

– La réunion de deux ensembles en un ensemble unique s'appelle leur somme $M + N$.

Le nombre cardinal de l'ensemble résultant est la somme des nombres cardinaux des deux ensembles composants : si :

$\alpha = \overline{\overline{M}}$ $\beta = \overline{\overline{N}}$ $\alpha + \beta = \overline{\overline{M + N}}$

Cette somme est indépendante de l'ordre des composants (comme tout nombre cardinal.) L'addition des nombres cardinaux est donc commutative et associative

L'ensemble formé en remplaçant chaque unité de l'ensemble N par un ensemble équivalent à M s'appelle le produit : $M \times N$.

Le produit des deux nombres cardinaux : $\alpha = \overline{\overline{M}}$, $\beta = \overline{\overline{N}}$, est par définition le nombre cardinal du produit $M \times N$:

$$\alpha . \beta = \overline{\overline{M . N}}$$

La multiplication des nombres cardinaux vérifie les lois commutative, associative et distributive

Théorème : Si un nombre cardinal fini c est la somme de deux nombres cardinaux finis a, b ; $a + b = c$, c ne peut jamais être égal ni à a ni à b.

Autrement dit, si un ensemble M est fini, et si M' en est une partie intégrante, M et M' ne sont pas équivalents.

D'où définition du sens de l'inégalité des nombres.

(1) Proposition : Si deux ensembles M et N ont respectivement des parties intégrantes M', N', telles que : $M \sim N'$ $N \sim M'$ ces deux ensembles sont équivalents.

On entend par ensemble fini un ensemble qu'on peut former en partant d'un élément initial et en lui ajoutant successivement d'autres éléments, de sorte qu'en retirant successivement tous ces éléments dans l'ordre inverse on puisse retrouver l'élément initial.

Lemme: Si deux ensembles sont équivalents, ils peuvent être coordonnés de telle manière, qu'à un élément de l'un, donné arbitrairement, corresponde un élément également arbitraire de l'autre.

Démonstration par induction complète. Soit un ensemble M qui n'est équivalent à aucune de ses parties intégrantes. Je dis que l'ensemble (M+1) jouit de la même propriété. ~~1er Cas~~ Soit N une partie intégrante de (M+1) deux cas: 1° 1 appartient à N, c.à.d. $N = N'+1$; $N' \lesssim M$ (partie intégrante). Si $N \sim M+1$, on peut faire correspondre l'élément 1 de N à l'élément 1 de (M+1); alors $N' \sim M$, ce qui contredit l'hypothèse. 2° 1 n'appartient pas à N: $N \lesssim M$. Si $N \sim M+1$, prenons une correspondance équivalente entre N et M+1, et soit n l'élément de N qui correspond à l'élément 1 de M+1, alors: $N = N'+n$, et $N' \sim M$ en même temps que $N' \lesssim M$, ce qui contredit l'hypothèse. Le th. est donc démontré, car il est évident pour les ensembles de deux éléments.

Le caractère essentiel des ensembles finis ~~est donc~~ consiste en ce qu'ils ne peuvent être équivalents à aucune de leurs parties intégrantes. Les ensembles infinis, au contraire, sont toujours équivalents à quelqu'une de leurs parties intégrantes.

C'est la distinction capitale entre les nombres finis et infinis, qui fait que ceux-ci constituent un genre de nombre tout nouveau et c'est la grande pierre d'achoppement qui a empêché d'admettre l'infini actuel. On admettait a tort qu'il y eût une contradiction à ce qu'un ensemble infini ait le même nombre qu'une de ses parties.



Mais depuis quand y a-t-il contradiction à ce que le tout et la partie soient compris sous un même concept universel formé par abstraction de la nature et de l'ordre de leurs éléments ? On ne peut prouver cette contradiction qu'en supposant tacitement qu'on a affaire à des ensembles finis. — On ne peut confondre la réalité concrète d'un ensemble avec son nombre qui en est une ~~caractère~~ image abstraite. L'axiome « Le tout est plus grand que sa partie » n'est vrai que des entités objectives et absolues. — Par exemple, Soit M l'ensemble des nombres entiers, M' l'ensemble des n. pairs, M'' celui des nombres impairs : M = M' + M''. Il n'y a pas de contradiction à attribuer le même nombre cardinal à M et à M' (ou M'') bien que M ait plus de réalité (de contenu) que M' : pourvu que l'on n'oublie pas la distinction entre réalité et nombre.

— Soit a un nombre cardinal transfini, n un nombre cardinal fini quelconque, on a : $a + n = a$, $a . n = a$, $a^n = a$

— Un nombre cardinal fini correspond à un ensemble fini. Chaque nombre cardinal est complètement indépendant des autres ; c'est un concept simple qui existe par lui-même, une multiplicité unitaire et organique d'unités associées d'une façon spéciale. Les parties intégrantes d'un nombre n'ont donc qu'une existence toute virtuelle. $5 = 2 + 3$ ne signifie pas que le concept 5 est composé réellement des concepts 2 et 3 (car alors comment serait aussi le composé réel des concepts 1 et 4 ?) mais qu'un ensemble concret dénombré par 5 peut être réellement composé de deux ensembles dénombrés par 2 et 3. Mais le nombre 5 en lui-même est indivisible ⊕ Plus généralement, toutes les propriétés et lois des nombres traduisent idéalement les relations réelles qui peuvent exister entre les ensembles correspondants (v. à la fin.)

⊕ ou du moins la possibilité de le diviser est toute idéale

Georg Cantor: Mittheilungen zur Lehre vom Transfiniten

(extrait du t. 92 de la Zeitschrift für Philosophie und Philosophische Kritik.)

cf. t. 91 de la Zeitschrift, p. 81 et 252.

Suite et fin de la section VIII.

Les nombres cardinaux s'étendent au domaine du transfini au moyen des nombres ordinaux transfinis. Ceux-ci ne sont par autre chose que des types d'ensembles infinis ~~bien~~ ordonnés en suite linéaire (cf. Grundlagen, p. 4)

9. Concept d'une multiplicité ~~bien~~ ordonnée à n dimensions: ensemble d'objets donnés et séparés, qui peuvent être rangés suivant n ~~directions~~ relations différentes, indépendantes, qu'on nomme directions; ces directions elles-mêmes ayant reçu un ordre déterminé.

Entre deux éléments qcq. donnés il y a, suivant ch. direction un rapport d'ordre (το προτερον και υστερον κατα ταξιν) on dit que leurs rang est inférieur, égal ou supérieur. ~~trois~~ Signes $\{ <, =, >$

Trois éléments étant donnés, tels que suivant une même direction on ait: $E_1 \leq E_2$ $E_2 \leq E_3$

on doit avoir aussi: $E_1 \leq E_3$

et $E_1 = E_3$ seulement dans le cas où: $E_1 = E_2$, $E_2 = E_3$.

1er exemple L'espace est une multiplicité ordonnée à 3 dimensions.

2e exemple Le plan est une multiplicité ordonnée à 2 dimensions.

3e exemple Un morceau de musique est une multiplicité à 4 dimensions (le temps, la durée de chaque note, la hauteur, l'intensité)

4e exemple Un tableau (considéré comme un ensemble de points coloriés en nombre assez grand pour donner l'illusion de la continuité) est une multiplicité à 4 dimensions (2 dimensions superficielles, la couleur et la valeur)

Ces considérations s'appliquent aussi aux ensembles infinis. Il s'agit ici d'une infinité actuelle, les éléments étant donnés, déterminés et tous présents ensemble; tandis que l'infinité potentielle ne ~~peut~~ s'applique qu'aux choses indéterminées ou variables.

Définition du nombre idéal (type d'ordre) d'un ensemble ~~bien~~ ordonné.

« Soit M un ensemble quelconque déterminé, ordonné suivant n dimensions, et composé d'un nombre fini ou actuellement infini d'éléments; si nous faisons abstraction de la constitution de ces éléments, en conservant leur ordre suivant les n directions différentes, nous formons une image intellectuelle, un concept général (universale) que j'appelle le nombre ~~ord~~ idéal correspondant à l'ensemble M, et que je désigne par $\overline{M}$. »

Ainsi sont engendrés (par les exemples précédents) des types d'ordre simples, doubles, triples, ... multiples.

10. Par l'abstraction précédente, les divers éléments concrets de l'ensemble se trouvent réduits à de simples unités égales, qui ne se distinguent que par leur rang, puisqu'elles sont rangées dans le même ordre que les éléments correspondants.

Un type d'ordre multiple est ainsi le paradigme idéal d'un ensemble ordonné à n dimensions; il constitue un nombre réel entier à n dimensions.

Un type d'ordre est dit pur quand deux quelconques de ses unités constituantes ont un rang différent suivant 1 dimension au moins. Dans le cas contraire, il est dit mixte: c.à.d. il contient des groupes d'unités qui ne diffèrent par aucune des n dimensions (1)

Tout type d'ordre mixte dérive d'un type d'ordre pur dans lequel on remplace les unités par certains nombres cardinaux.

Quand peut-on dire que deux ensembles ordonnés à n dimensions ont un seul et même nombre idéal ou type d'ordre ?

(1) Ces groupes d'unités constituent des nombres cardinaux.

Définition de la similitude de deux ensembles ordonnés.

Deux ensembles ordonnés à n dimensions M et N sont dits semblables, quand on peut les faire correspondre, élément par à élément, d'une manière complète, univoque et réciproque, de telle sorte que, si E et E' sont deux éléments quelconques de M, F et F' les deux éléments correspondants de N, le rapport d'ordre de E et à de E' dans M suivant la k^e dimension est soit le même que le rapport d'ordre de F à F' dans N suivant la k^e dimension, k prenant toutes les valeurs entières $1, 2, 3, \ldots n$. Une telle correspondance s'appelle représentation (Abbildung) d'un ensemble dans l'autre (1). On écrit : $M \sim N$

Pour que deux ensembles ordonnés à n dimensions aient un seul et même nombre, il faut et il suffit qu'ils soient semblables. En signes, on a : $\overline{M} = \overline{N}$, si $M \sim N$ et : $M \sim N$, si $\overline{M} = \overline{N}$.

Le type d'ordre d'un ensemble M est donc le concept général sous lequel rentrent l'ensemble M et les ensembles semblables à M.

Deux ensembles semblables sont par là même équivalents ; mais deux ensembles équivalents ne sont pas toujours semblables.

Si deux ensembles ordonnés ont le même type d'ordre, ils ont aussi un seul et même nombre cardinal. En signes, on a :

$$\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}} \quad \text{si :} \quad \overline{M} = \overline{N}.$$

Le nombre cardinal d'un ensemble M est aussi celui de son type d'ordre $\overline{M}$, et s'en déduit quand on fait abstraction de l'ordre particulier de ses unités. Si α désigne le type d'ordre $\overline{M}$, $\overline{\alpha}$ désignera le nombre cardinal $\overline{\overline{M}}$. Ainsi aux nombres ordinaux finis : $1, 2, 3, \ldots\ldots n, \ldots$



correspondent les nombres cardinaux finis :

$$\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots\ldots \overline{n}, \ldots$$

(1) On dit encore que les deux ensembles sont dénombrables l'un par l'autre.

Deux ensembles finis à n dimensions n'admettent qu'une seule représentation de l'un dans l'autre. La même propriété appartient aux ensembles infinis ordonnés suivant une dimension, c.à.d. bien ordonnés.

11. Définition des parties d'un type d'ordre à n dimensions. Définition de l'addition de deux types d'ordre à n dimensions.

Étant donnés deux ensembles M et N, auxquels correspondent les types:
$$\overline{M} = \alpha, \qquad \overline{N} = \beta,$$
on forme un nouvel ensemble $M+N$ (à n dimensions) (composé des mêmes éléments et) déterminé de la manière suivante:

Les éléments de M doivent avoir dans $M+N$ les mêmes rapports d'ordre entre eux suivant les n dimensions que dans M;

Les éléments de N doivent avoir dans $M+N$ les mêmes rapports d'ordre entre eux que dans N, suivant les mêmes dimensions;

Enfin tous les éléments de N doivent suivre tous les éléments de M suivant les n directions de l'ensemble $M+N$.

Tous les ensembles $M+N$ ainsi définis sont semblables et ont un seul et même type d'ordre qu'on appelle la somme de α et de β:
$$\alpha + \beta = \overline{M+N}$$
(α augendus, β addendus) — La loi associative:
$$\alpha + (\beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma$$
est vraie, mais non la loi commutative:
$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$
Le nombre cardinal de $\alpha + \beta$ est la somme des nombres cardinaux de α et de β; en signes:
$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}.$$

Définition de la multiplication de deux types d'ordre à n dim.

Soit un ensemble N du type β, de sorte que : $\overline{N} = \beta$, et soient $F_1 F_2 \dots F_\lambda \dots$ les éléments de N.

Soient d'autre part $M_1 M_2 \dots M_\lambda \dots$ des ensembles du type α, de sorte que : $\overline{M}_1 = \overline{M}_2 = \dots = \overline{M}_\lambda = \dots = \alpha$

Supposons tous ces ensembles semblables représentés les uns dans les autres, et soient :

$E_{1,1}$, $E_{1,2} \dots$, $E_{1,\mu}$, ... les éléments de M_1 ;

$E_{2,1}$, $E_{2,2} \dots E_{2,\mu}$, ... ——— M_2 ;

— — — — — — — — — — — — — — —

$E_{\lambda,1}$, $E_{\lambda,2}$, ... $E_{\lambda,\mu}$ .... ——— M_λ ;

— — — — — — — — — — — — — — —

les éléments se correspondant suivant les lignes verticales.

On forme un nouvel ensemble, désigné par $M \times N$, en remplaçant ~~les élém~~ dans l'ensemble N les éléments $F_1 F_2 \dots F_\lambda$ par les ensembles $M_1 M_2 \dots M_\lambda \dots$ de la manière suivante :

Tous les éléments d'un même ensemble M_λ doivent conserver dans $M \times N$ leurs rapports d'ordre réciproques suivant les n directions. Entre deux éléments d'ensembles différents, $E_{\varkappa\mu}$, $E_{\lambda\mu'}$, 1° ou bien $F_\varkappa$ et F_λ ont un rang différent dans N suivant la ν^e dimension, alors leur rapport d'ordre devra être celui de $E_{\varkappa\mu}$ à $E_{\lambda\mu'}$ dans $M \times N$ suivant la ν^e dimension ; 2° ou bien $F_\varkappa$ et F_λ ont le même rang dans N suivant la ν^e dimension, alors le rapport d'ordre de $E_{\varkappa\mu}$ à $E_{\lambda\mu'}$ dans $M \times N$ devra être le même que celui de $E_{\varkappa\mu}$ à $E_{\varkappa\mu'}$ dans $M_\varkappa$, ou, à cause de la similitude, que celui de $E_{\lambda\mu}$ à $E_{\lambda\mu'}$ dans M_λ, suivant la ν^e dimension.

Tous les ensembles $M \times N$ ordonnés à n dimensions, qu'on forme ainsi sont semblables et ont un même type qu'on nomme le produit de α par β : $\alpha \times \beta = \overline{M \times N}$



La loi associative : $\alpha \times (\beta \times \gamma) = (\alpha \times \beta) \times \gamma$
est vraie mais non la loi commutative. La loi distributive :
$$\alpha \times (\beta + \gamma) = \alpha \times \beta + \alpha \times \gamma$$
est vraie pour α multiplicande.
Le nombre cardinal du produit de deux types est le produit de leurs nombres cardinaux. $\overline{\alpha \times \beta} = \bar{\alpha} \times \bar{\beta}$.

12. Types conjugués d'un type à $\underline{n}$ dimensions donné α.
On peut transformer un type par permutation de deux directions, la μ^e et la ν^e, si deux unités qcques du type ont dans le type transformé les mêmes rapports d'ordre suivant la μ^e et la ν^e direction, qu'elles avaient dans le type primitif suivant la ν^e et la μ^e.
On effectue la transformation réciproque d'un type par rapport à une direction, la ν^e, si l'on renverse le rapport d'ordre de deux unités qcques par rapport à cette direction ($>$ devient $<$, $<$ devient $>$, $=$ reste $=$.)
Il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ transformations possibles par permutation ; elles donnent en tout $\underline{n!}$ types conjugués (y compris α)
Avec les transformations réciproques (au nombre de $\underline{n}$) on obtient en tout $2^n . n!$ types conjugués (y compris α)

13. Étude des types à $\underline{n}$ dimensions finis, c.à.d. dont le nombre cardinal $\underline{m}$ (nombre des éléments) est fini.
Les types purs et simples (à 1 dimension) sont les nombres ordinaux finis, car les ensembles ordonnés à 1 dimension d'un type pur sont toujours bien ordonnés ; leurs types constituent en général les nombres ordinaux. A chaque nombre cardinal fini ne correspond qu'un type pur et simple, c.à.d. un seul nombre ordinal (car un ensemble fini n'est jamais équivalent à une de ses parties intégrantes)

Le nombre de tous les types simples (purs et mixtes) correspondant à un nombre cardinal <u>m</u> est 2^{m-1}.

Considérons maintenant les types doubles (à 2 dimensions) d'un nombre cardinal donné <u>m</u>.

<u>Problème</u> : Quel est le nombre $\Phi(m)$ des types <u>purs</u> à 2 dimensions d'un nombre cardinal donné <u>m</u> ?

$\Phi(1) = 1, \quad \Phi(2) = 4, \quad \Phi(3) = 24, \quad \Phi(4) = 196,$

$\Phi(5) = 2016, \quad \Phi(6) = 24976, \ldots\ldots$

Quel est le ~~nombre~~ $\Psi(m)$ ~~des types~~ de tous les types (purs ou non) à 2 dimensions d'un nombre cardinal donné <u>m</u> ?

$\Psi(1) = 1, \quad \Psi(2) = 5, \quad \Psi(3) = 33, \quad \Psi(4) = 281,$

$\Psi(5) = 2961, \quad \Psi(6) = 37277, \ldots$

14. Recherche du nombre $\Phi(m, n)$ des types purs, du nombre $\Psi(m, n)$ des types purs et mixtes à <u>n</u> dimensions correspondant à un nombre cardinal donné <u>m</u>.



Note de la fin de l'article du tome 91 (VIII)

On peut ranger les nombres cardinaux finis par ordre de grandeur, une fois leur inégalité définie. Ils forment alors un ensemble simplement ordonné, et même bien ordonné, car il y a un premier nombre, 1, et chaque nombre n est suivi d'un nombre déterminé, $n+1$. La suite naturelle sans fin des nombres finis est un ensemble du type d'ordre ω.
(S. Augustin, loc. cit.: « et singuli quique finiti sunt, et omnes infiniti sunt. »)
Puisque cette suite est sans fin, elle est actuellement infinie. En effet, pour pouvoir affirmer qu'un ensemble est actuellement infini, il suffit que tous ses éléments soient déterminés, et que leur nombre soit plus grand que tout nombre fini. Il n'est nullement nécessaire que l'ensemble ~~se termine par~~ contienne un dernier élément qui le termine. Un ensemble est complètement ~~déterminé ou~~ délimité (abgegrenzt) quand ~~tous ses élém~~ tout ce qui lui appartient est intrinsèquement déterminé, et bien distinct de ce qui ne lui appartient pas.

La suite naturelle des nombres ~~offre un ordre~~ n'est qu'une des ~~manières~~ innombrables manières possibles de ranger les nombres cardinaux suivant un ordre déterminé; elle est donc dans une certaine mesure arbitraire et ne restreint nullement l'indépendance idéale des nombres les uns par rapport aux autres.
La suite des nombres cardinaux transfinis ou puissances par ordre de grandeur est encore un ensemble bien ordonné.

Cf. Separatabdruck aus Bd. 91, p. 81 der Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik. Halle, Verlag v. Pfeffer (R. Stricker) 57 pages. — Halle a. S. Heynemann'sche Buchdruckerei (F. Beyer)

Stolz –

Arithmétique générale



1

Otto Stolz: Vorlesungen über allgemeine Arithmetik (nach den neueren Ansichten)

1er ~~volume~~ [Leipzig, Teubner, 1885.]

I. — On appelle grandeur toute chose qui peut être dite égale ou inégale à une autre.

Toutes les grandeurs comparables à une même grandeur forment un système de grandeurs de même espèce.

1° Si $a = b$, on doit avoir aussi : $b = a$.

Si $a \gtrless b$, $b \lessgtr a$.

2° Deux grandeurs quelconques d'un système doivent être égales ou inégales.

3° Si $a = b$, $b = c$, on doit avoir : $a = c$.

4° Si $a \backsim b$ (a combiné avec b) $= c$, et si $c = c'$, on a aussi : $a \backsim b = c'$.

Le résultat d'une combinaison univoque de 2 grandeurs ne change pas quand on remplace une de ces grandeurs ~~par~~ par une grandeur égale (ou toutes les deux) c.à.d. que si : ~~a~~ $a = a'$, $b = b'$, $a \backsim b = a' \backsim b'$.

Telles sont les 4 conditions des opérations arithmétiques $+ - \times$:

— Conditions que doivent vérifier les définitions des inégalités :

1° Si $a > b$, on doit avoir : $b < a$.

2° De deux grandeurs inégales, l'une doit être plus grande et l'autre plus petite.

3° Si $a = b$, $b > c$, on doit avoir : $a > c$.

4° Si $a > b$, $b > c$, on doit avoir : $a > c$.

5° Si $a > a'$, $b > b'$, on ne doit avoir, ni : $a + b < a' + b$, ni : $a + b < a + b'$.



Un système de nombres est un système de grandeurs qu'on peut représenter au moyen d'un nombre (?) fini de signes, dont chacun peut être répété aussi souvent qu'on le veut.
Un système de grandeurs est représenté par un système de nombres quand on peut faire correspondre un nombre à chaque grandeur et réciproquement. A deux grandeurs égales doivent correspondre des nombres égaux et réciproquement.
Extension du concept de nombre: naturel, rationnel, réel, enfin complexe. Double marche: synthétique, analytique. Deux degrés bien distincts: ds la marche synthétique, on va du discret au continu. Ds la marche analytique, après avoir défini les nombres par un nombre fini de signes, on représente une suite infinie de ces nombres par un signe. C'est l'introduction de l'infini dans la mathématique: c'est le point tournant de son développement (Wendepunkt)

II. Les nombres naturels.
Pluralité est une multitude (Menge) d'objets égaux entre eux, c.à.d. d'objets distincts dont on néglige les différences, et l'ordre.
Deux pluralités sont égales quand on peut faire correspondre (de zuordnen) à chaque objet de la 1e un objet distinct de la 2e, sans qu'il en reste de celle-ci.
De deux pluralités, la plus grande est celle dont il reste, après l'opération précédente, des objets non employés.
On compare les pluralités avec celles qu'on obtient par la répétition du signe 1 (un). Le caractère commun à toutes les pluralités égales est leur nombre. Le nombre (naturel ou entier) est une pluralité de unités. — A des pluralités égales répondent des nombres égaux; à la plus grande pluralité, le plus grand nombre.

Définition de l'addition. Si l'on ajoute la pluralité B à la pluralité A, on forme une nouvelle pluralité, qu'on appelle leur somme : A + B. Lois associative et commutative.

Si $A = A'$, $B = B'$, $A + B = A' + B'$.

Soit α le nombre de A, β le nombre de B ; le nombre de $A + B = A' + B'$ est : $\alpha + \beta$ d'où définition : La somme de 2 nombres est un nombre qui contient toutes les unités de l'un et de l'autre.

Règles de l'addition des nombres, déduites de l'addition des pluralités.

1° L'addition est une combinaison univoque de 2 nombres.

2° $(a+b) + c = a + (b+c)$

3° $a + b = b + a$

4° De $a = a'$ résulte $a + b = a' + b$.

5° $a + b > a$.

6° De $a > a'$ résulte $a + b > a' + b$.

Conception des nombres comme sommes. La formule (2°) donne une méthode récurrente pour former la somme de 2 nombres.

Soustraction. Si $A > B$, on a un reste D : $B + D = A$

Donc si les nombres $a > b$, il y a un nombre d et un seul (à cause de 6°) qui vérifie l'équation : $b + x = a$.

Si $a \leq b$, cette équation n'a pas de solution (en vertu de 5°)

Formule : $d = a - b$, $b + (a-b) = (a-b) + b = a$.

Propositions : 1° Si de nombres égaux on retranche des nombres égaux, on obtient des différences égales.

2° De $a + b = a + b'$ résulte $b = b'$.

3° De $a - b = a' - b$ résulte $a = a'$,

et de $a - b = a - b'$ résulte $b = b'$.

4° Si a est $>, =, < b - c$, $a + c$ est $>, =, < b$, et vice versa



5° Si $a-b >, =, < a'-b'$, on a : $a+b' >, =, < a'+b$; vice versa

6° $(a+b)-b = a$.

7° $a-(a-b) = b$ $(a>b)$

8° $(a+m)-(b+m) = a-b$ $(a>b)$

9° $(a-m)-(b-m) = a-b$ $(a>b>m)$

10° Si $a>a'>b$, on a : $a-b > a'-b$.

11° Si $a>b'>b$, on a : $a-b > a-b'$.

12° Si $a>a'>b'>b$, on a : $a-b > a'-b'$.

Calcul des agrégats (polynômes numériques) par une suite d'additions et soustractions. $7+2-8=1$, $7-8+2$ n'a pas de sens.

Multiplication. Somme de b termes A : bA.

Si la pluralité A est un nombre a, on a : ba, produit de a par b. On pose : $1 \times a = a$.

bA n'est pas un produit, car on ne combine que les grandeurs de même espèce.

Règles de la multiplication :

1° C'est une combinaison univoque de 2 nombres.

2° Le produit ne change pas quand on change l'ordre des facteurs. (loi commutative)

3° Le produit ne change pas quand on effectue le produit partiel de plusieurs facteurs (loi associative)

Ces 2 lois sont vérifiées si l'on a : $abc = a(bc)$ $ab = ba$

4° Si on multiplie des nombres égaux par des nombres égaux, on obtient des produits égaux.

5° Si $b>1$, $a.b > a$.

6° De $a>a'$ résulte $a.b > a'.b$

7° De $a>a'$, $b>b'$, résulte $a.b > a'.b'$

8° Loi distributive : $(a+b)c = ac+bc$

et, par commutation : $a(b+c) = ab+ac$.

~~§~~ (se démontre par l'addition de $\underline{c}$ binômes $a+b$.)

9° Si $a>b$, $(a-b)c = c(a-b) = ac-bc$.

Division. Résoudre l'équation : $bx = a$ $(a>b>1)$

Ou bien : $a=bq$, ou bien : $bq < a < b(q+1)$

$\frac{a}{b} = q$ ou bien : $a = bq+r$

Propriétés de la division (analogues à celles de la soustraction)

1° Si l'on divise des nombres égaux par des nombres égaux on obtient des quotients égaux.

2° De $ab = ab'$ résulte $b=b'$.

3° De $a:b = a':b$ résulte $a=a'$,

et de $a:b = a:b'$ résulte $b=b'$.

4° Si $a >,=,< b:c$, $ac >,=,< b$. vice versa

5° Si $a:b >,=,< a':b'$, $ab' >,=,< a'b$. vice versa

6° $(a.b):b = a$.

7° $a:(a:b) = b$.

8° $am:bm = a:b$

9° $(a:m):(b:m) = a:b$

} toujours en supposant les divisions possibles exactement.

10° Si $a>a'$, on a $a:b > a':b$.

11° Si $b<b'$, — $a:b > a:b'$.

12° Si $a>a'$, $b<b'$, on a $a:b > a':b'$.

13° $(a:b)c = ac:b$.

14° $(a:b):c = a:bc$.

15° $a:(b:c) = ac:b$.

16° $(a:b).(a':b') = aa':bb'$.

17° $(a:b):(a':b') = ab':ba'$.



Formules distributives : $a : m + b : m = (a+b) : m$
$a : m - b : m = (a-b) : m$.

Puissance : a^n. Base : a.
Si $m > 1$, $(1+d)^m > 1 + md$
Définition du monôme.
Systèmes de numération. On prend une base $e \geq 2$: tout nombre $a > e$ peut se mettre sous la forme :

$$a = pe^m + p'e^{m-1} + p''e^{m-2} + \dots + p^m$$

où $p, p', p'', \dots p^m$ sont des nombres inférieurs à e.
Donc au moyen de e chiffres on peut représenter tout nombre a tel que $e^m < a < e^{m+1}$
par $(m+1)$ signes juxtaposés : $pp'p''\dots p^m$.
Le chiffre 0 n'est pas un nombre.
Chaque nombre a n'a qu'une seule représentation systématique (en chiffres).

III. Théorie analytique des nombres rationnels.
Hypothèse A : Soit un système de grandeurs $a, b, c, \dots$
Soit $\circ$ le signe d'une combinaison univoque (Thésis) telle que
$a \circ b = c$, et que si $a = a'$, $a \circ b = a' \circ b$.
Prop. I : Si la thésis à 3 termes est associative, la thésis d'un nombre quelconque de termes est associative.
Hypothèse B : $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
Prop. II : Toute thésis associative est commutative si la thésis à 2 termes est commutative.
Hypothèse C : $a \circ b = b \circ a$
Corollaire : Si $a = a'$, $b = b'$, $a \circ b = a' \circ b'$.

L'opération inverse (*Lysis*) est définie par : $b \circ x = a$, $x \circ b = a$

Hypothèse D : Cette équation est vérifiée (dans tous ou ds certains cas) *par une seule* valeur de x qu'on représentera par : $x = a \cup b$, de sorte que le symbole $\cup$ soit univoque, et qu'on ait :

$$(a \cup b) \circ b = a$$

On supposera dans la suite que le symbole $\cup$ a un sens, c.à.d. que l'opération inverse est possible.

Prop. III : Règles des opérations $\circ$ et $\cup$.

1°. Si $a = a'$, $b = b'$, $a \cup b = a' \cup b'$.

2°. On a : $(a \circ b) \cup b = a$ à la condition que l'équation : $a \circ b = x \circ b$ n'ait que la solution $x = a$.

3° $a \cup b = (a \circ m) \cup (b \circ m) = (a \cup m) \cup (b \cup m)$

4° $(a \cup b) \circ c = (a \circ c) \cup b$.

5° $(a \cup b) \cup c = a \cup (b \circ c)$

6° $a \cup (b \cup c) = (a \circ c) \cup b$

7° $(a \cup b) \circ (a' \cup b') = (a \circ a') \cup (b \circ b')$

8° $(a \cup b) \cup (a' \cup b') = (a \circ b') \cup (a' \circ b)$

9° Le résultat d'une suite d'opérations $\circ$ et $\cup$ ne dépend pas de leur ordre, pourvu que les opérations successives soient possibles.

Hypothèse D'. L'équation $b \circ x = a$ a une solution et *une seule*, ou bien elle n'en a aucune. — Il en résulte :

1° Si $a = a'$, $b = b'$, $a \cup b = a' \cup b'$.

2° De $a \circ b = a \circ b'$ résulte $b = b'$.

3° De $a \cup b = a' \cup b$ résulte $a = a'$,
et de $a \cup b = a \cup b'$ —— $b = b'$.

4° Si $a \cup b = a' \cup b'$, on a : $a \circ b' = a' \circ b$, et vice versa



<u>Formules distributives</u>. Deux opérations thétiques $\circ$ et θ.

<u>Prop. V</u> : Si $\circ$ est associative, et si l'on a :

$$(a \circ b)\,\theta\, c = (a\,\theta\, c) \circ (b\,\theta\, c)$$

on a aussi : $(a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_m)\,\theta\, c = (a_1\,\theta\, c) \circ (a_2\,\theta\, c) \circ \dots \circ (a_m\,\theta\, c)$

Si l'on a : $a\,\theta\,(b \circ c) = (a\,\theta\, b) \circ (a\,\theta\, c)$

on a aussi : $a\,\theta\,(b_1 \circ b_2 \circ \dots \circ b_m) = (a\,\theta\, b_1) \circ (a\,\theta\, b_2) \circ \dots \circ (a\,\theta\, b_m)$

Si l'on a à la fois :

$$(a \circ b)\,\theta\, c = (a\,\theta\, c) \circ (b\,\theta\, c) \qquad a\,\theta\,(b \circ c) = (a\,\theta\, b) \circ (a\,\theta\, c)$$

on peut développer toute expression

$$(a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_m)\,\theta\,(b_1 \circ b_2 \circ \dots \circ b_n)$$

de deux manières différentes (par rapp. aux $\underline{a}$, ou par rapp. aux $\underline{b}$)

Si les équations :

$$x_1\,\theta\, c = a_1 \qquad x_2\,\theta\, c = a_2 \quad \dots\dots \quad x_m\,\theta\, c = a_m$$

ont les solutions :

$$x_1 = a_1 \oslash c \qquad x_2 = a_2 \oslash c \quad \dots\dots \quad x_m = a_m \oslash c$$

et si l'on a : $(a \circ b)\,\theta\, c = (a\,\theta\, c) \circ (b\,\theta\, c)$

on a : $(a_1 \oslash c) \circ (a_2 \oslash c) \circ \dots \circ (a_m \oslash c) = (a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_m)\,\theta\, c$

Si l'opération $\circ$ est <u>associative</u>, et si toute équation $b \circ x = a$ ou $x \circ b = a$ a au plus une solution en $\underline{x}$; si de plus dans le système de grandeurs (I) à chaque grandeur $\underline{m}$ correspondent 2 grandeurs x, y telles que $m = x \odot y$

il résulte des deux formules de la loi distributive :

$$(a \circ b) \odot c = \text{—} \qquad a \odot (b \circ c) = \text{—}$$

que l'opération $\circ$ est <u>commutative</u>. — En effet :

$s = (a \circ b) \odot (c \circ d) = l \circ \underline{m \circ n} \circ p = l \circ \underline{n \circ m} \circ p$ en posant :

$a \odot c = l \qquad b \odot c = m \qquad a \odot d = n \qquad b \odot d = p$

Nous avons supposé jusqu'ici que l'opération o n'était pas toujours susceptible d'inversion, (que l'opération inverse ∪ n'avait pas toujours un sens.) Nous allons créer de nouvelles grandeurs qui compléteront le système (I) ~~de telle sorte~~ de manière que toute équation

$b \circ x = a$ ait une solution, et qui seront soumises aux mêmes règles de calcul. On donnera ainsi aux formules où figurent les opérations inverses (lytiques) toute la généralité nécessaire à l'algèbre où chaque lettre doit pouvoir prendre toutes les valeurs du système (I.)

1e Définition. Si, dans l'hypothèse D', l'équation $b \circ x = a$ n'est vérifiée par aucune grandeur du système (I), on dira qu'elle a pour solution une nouvelle et unique grandeur étrangère au système (I) qu'on pourra désigner par $a \cup b$, puisque ce symbole n'a pas de sens jusqu'ici. $b \circ (a \cup b) = (a \cup b) \circ b = a$

L'équation : $a \circ b' = a' \circ b$ a encore un sens, même quand $a \cup b$, $a' \cup b'$ n'en ont pas (n'appartiennent pas à I.)

2e Définition. Deux nouvelles ~~grandeurs~~ aux objets : $a \cup b$, $a' \cup b'$ sont égales, quand on a : $a \circ b' = a' \circ b$

et alors seulement.

Cette définition vérifie l'axiome : Deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles.

Les symboles $a \cup b$ deviennent ainsi des grandeurs qui forment un système (II) par opposition au système (I.) On les désignera par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ On emploiera les mêmes lettres pour désigner des grandeurs prises dans l'ensemble des systèmes (I) et (II).

3e Définition. $a \cup b$, $a' \cup b'$ étant des grandeurs du système (II), on pose

$$(a \cup b) \circ c = c \circ (a \cup b) = (a \circ c) \cup b \qquad (1)$$

$$(a \cup b) \circ (a' \cup b') = (a \circ a') \cup (b \circ b') \qquad (2)$$

Si : $a \cup b = a' \cup b'$, on a : $(a' \cup b') \circ b = a$, et vice versa.



Proposition VI. L'opération o définie par les 2 équations (1) (2) et appliquée aux grandeurs des systèmes (I) (II) est commutative et associative sans exception.

Si α, α', β sont des grandeurs du système généralisé, et si l'on a: $\alpha = \alpha'$; on a aussi: $\alpha \circ \beta = \alpha' \circ \beta$.

L'équation: $\xi \circ \beta = \alpha$ a toujours une solution et une seule, qu'on écrit: $\xi = \alpha \cup \beta$.

La lysis est toujours possible et univoque.

Le système général (I et II) vérifie les conditions énoncées Prop. III. On peut remplacer dans les formules $a, b, c, \dots$ par $\alpha, \beta, \gamma \dots$

— Module de la thésis et grandeur réciproque (inverse)

Posons: $\nu = \alpha \cup \alpha$; ν est solution de l'équation: $a \circ \nu = a$.

$a \cup a = b \cup b$ donc $b \circ \nu = b$ Propriété essentielle:

$$\alpha \circ \nu = (m \cup n) \circ \nu = (m \circ \nu) \cup n = m \cup n = \alpha.$$

La grandeur ν qui, combinée avec une grandeur quelconque du système général la laisse invariable, est le module de la thésis o.

De: $\alpha \circ \nu = \alpha$ on tire: $\alpha = \alpha \cup \nu$.

La grandeur $\nu \cup \alpha$ est en général différente de α; on la nomme grandeur inverse ou réciproque de α: $\bar{\alpha}$.

$\bar{\nu} = \nu$. Les réciproques de grandeurs égales sont égales.

La réciproque de $\bar{\alpha}$ est α; de $\alpha \circ \beta$ est $\bar{\alpha} \circ \bar{\beta}$; de $\alpha \cup \beta$ est $\beta \cup \alpha$.

La lysis $\alpha \cup \beta$ est identique à la thésis de α et de $\bar{\beta}$.

$$\alpha \circ \bar{\beta} = \alpha \circ (\nu \cup \beta) = (\alpha \circ \nu) \cup \beta = \alpha \cup \beta.$$

Si les hypothèses A, B, C, D', E sont vraies du système I:

Définition. La nouvelle grandeur $\alpha = m \cup n$ sera plus grande ou plus petite que a, selon m sera plus grand

ou plus petit que $n \circ \alpha$. — α sera plus grand ou plus petit que $\beta = p \circ q$, selon que $m \circ q$ sera plus grand ou plus petit que $n \circ p$.

Cette définition de l'inégalité ne contredit aucun des principes précédemment admis, et vérifie les conditions des inégalités.

Prop. VII. Si l'on a $\alpha > \alpha'$, on a $\alpha \circ \beta > \alpha' \circ \beta$.

Soit $\beta = p \circ q$; si $\alpha \circ \beta >$ ou $< \alpha$, on a respect.: $p >$ ou $< q$.

— En appliquant les définitions précédentes aux 4 opérations on forme le système complet des nombres rationnels.

I. Institution des nombres fractionnaires absolus —

Soient $a, b, c, \ldots$ les nombres naturels (ou entiers absolus) formant le système (I). L'éq.: $x.b = a$ a une solution ou n'en a pas.

1ère définition. Si a n'est pas divisible par b, il existe une grandeur nouvelle, et une seule, qu'on représente par $a : b$ ou $\frac{a}{b}$ et qui satisfait l'équation: $b \times (a : b) = (a : b) \times b = a$.

2e définition: On pose: $a : b = a' : b'$ si $a . b' = a' . b$.

3e définition: $a : b >$ ou $< c$, suivant que $a >$ ou $< b.c$

$a : b >$ ou $< a' : b'$, suivant que $a . b' >$ ou $< a' . b$.

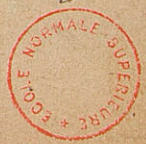
Les nouvelles grandeurs $\frac{a}{b}$ forment avec les nombres entiers le système des nombres rationnels absolus. $a : b = ma : mb$.

2 fractions égales réduites à leur plus simple expression sont identiques.

4e définition: $(a : b) c = c (a : b) = ac : b$

$(a : b)(a' : b') = aa' : bb'$.

Ainsi la division est toujours possible désormais, et reste univoque. Les règles et propriétés de la multiplication et de la division sont étendues aux fractions, ou aux nombres rationnels en général. Le module de la multiplication est 1 ; l'inverse de a est $\frac{1}{a}$, l'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.



II. Addition et soustraction des nombres rationnels absolus.

Prop: Si l'on réduit 2 fractions au même dénominateur: $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{n}$, la valeur de la fraction $\frac{m+p}{n}$ ne dépend pas de la valeur de ce dénominateur.

5e définition. La somme des fractions $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{n}$ est $\frac{m+p}{n}$.
Cette définition satisfait aux conditions générales de l'addition.

Prop: L'équation $\beta + \xi = \alpha$ a une solution et une seule (en ξ) quand $\alpha > \beta$, aucune quand $\alpha \leq \beta$.

Vérification des règles: $(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$
(dans le cas où $\alpha > \beta$) $(\alpha-\beta)\gamma = \alpha\gamma - \beta\gamma$

III. Introduction du zéro et des nombres négatifs.

L'équation: $\beta + \xi = \alpha$, dans le système des n. rationnels absolus, peut n'avoir pas de solution. Il y a lieu de compléter ce système.

6e définition. Si $\alpha \leq \beta$, on crée une nouvelle grandeur qu'on désigne par $\alpha - \beta$, et qui satisfait l'équation: $\beta + (\alpha - \beta) = (\alpha - \beta) + \beta = \alpha$.

7e définition. Deux nouvelles grandeurs: $\alpha - \beta$, $\alpha' - \beta'$ seront égales, si: $\alpha + \beta' = \alpha' + \beta$.
Si $\alpha = \beta$, $\alpha' = \beta'$; si $\alpha < \beta$, $\beta - \alpha = \beta' - \alpha'$.

8e définition. $(\alpha - \beta)$ est dit plus ~~grand~~ petit que tout nombre γ car $\beta + \gamma > \alpha$. — $(\alpha - \beta) >$ ou $< (\alpha' - \beta')$ suivant que $\alpha + \beta' >$ ou $< \alpha' + \beta$.

Le module de l'addition: $\alpha - \alpha = 0$ s'appelle zéro.
Les nouvelles grandeurs s'appellent nombres négatifs. Elles forment avec les anciennes le système des nombres rationnels: $A, B, \Gamma, \ldots$

9e définition: $(\alpha - \beta) + \gamma = \gamma + (\alpha - \beta) = (\alpha + \gamma) - \beta$
$(\alpha - \beta) + (\alpha' - \beta') = (\alpha + \alpha') - (\beta + \beta')$

La soustraction est désormais toujours possible et univoque.
Les règles de l'addition et de la soustraction ont une valeur absolument générale.

Exception : $A+B >$ ou $< A$ suivant que $B >$ ou < 0.
Si $\alpha < \beta$, $\alpha-\beta$ est un n. négatif, son réciproque $\beta-\alpha=\gamma$ est un nombre absolu : $\alpha-\beta = 0-\gamma$
Nombres positifs et négatifs réciproques les uns des autres et symétriques.
Comme on supprime dans l'usage le signe 0, il reste $-\gamma$ pour désigner le n. négatif réciproque du n. absolu γ, qui, considéré comme positif, s'écrit $+\gamma$. Valeur absolue γ.
1e prop : La valeur absolue d'une somme de nombres rationnels ne peut être plus grande que la somme de leurs valeurs absolues.
2e prop : Si $|A| > |B|$ $\quad |A+B| \geq |A| - |B|$

IV. Multiplication et division des nombres rationnels.

1re définition. $(\alpha-\beta)\gamma = \gamma(\alpha-\beta) = \alpha\gamma - \beta\gamma$ (1)
$$(\alpha-\beta)(\alpha'-\beta') = \alpha\alpha' + \beta\beta' - (\alpha\beta' + \beta\alpha') \quad (2)$$
Prop : Moyennant ces conventions, le produit $A.B$ est une combinaison commutative et associative sans exception.
Des formules (1) et (2) on tire : $0.A = A.0 = 0$.
$$(-\delta)\gamma = \gamma(-\delta) = -\delta\gamma \quad , \quad (-\delta)(-\delta') = \delta\delta'.$$
Si un produit $AB = 0$, il faut qu'un au moins des facteurs soit nul.
Règle des signes. $(-A)B = B(-A) = -AB$, $(-A)(-B) = +AB$.
Division : Si $B \gtrless 0$, l'équation : $XB = A$ a une solution et une seule : $X = A:B$.
Si $A=0$, il faut que $X=0$. Règle des signes.
Si $A = B = 0$, indétermination, représentée par le quotient $\frac{0}{0}$.
Si $A \gtrless 0$, l'équation : $X.0 = A$ n'a aucune solution rationnelle. On pourrait croire à une extension possible du système



au moyen de symboles tels que $\frac{A}{0}$. Mais, comme $A.0 = 0.B$, tous les nombres $\frac{A}{0}$ seraient égaux. De plus la formule de multiplication :

$$(A:0)B = AB:0$$

n'aurait pas de sens pour $B = 0$. Nous déclarons donc impossible la division par zéro.

Toutes les règles de multiplication et de division (sauf les inégalités du ch. II, à cause des n. négatifs) sont étendues aux nombres rationnels excepté le cas où un diviseur serait nul.

Les nombres naturels semblent avoir plus de réalité que les symboles purement formels $\frac{2}{3}$, 0, -2, etc. Mais ils peuvent être conçus comme un système de signes formés par la combinaison des signes 1 et +.

On a ainsi une théorie des nombres rationnels déduite systématiq^t d'un point de vue formel. Nous l'appelons analytique, par opposition à celle du ch. suivant, fondée sur des considérations géométriques.

En général, le système des nombres rationnels ne permet pas de résoudre les équations de la forme :

$$A_0X^m + A_1X^{m-1} + \dots + A_{m-1}X + A_m = 0$$

ni même de la forme :

$$X^m = \alpha. \quad (\alpha \text{ rat. pos})$$

On peut introduire de nouveaux nombres pour les satisfaire : par exemple $\sqrt{}$ — Ce seront des nombres irrationnels.

La méthode suivie jusqu'ici ne permet pas de les définir.

Borner le système des nombres aux nombres rationnels, c'est s'en tenir aux quatre opérations fondamentales de l'arithmétique ; c'est exclure les opérations du 3e ordre (puissances et racines).

La puissance sera considérée (IX) comme fonction de l'exposant.

IV. Théorie synthétique des nombres rationnels.

<u>Nombres fractionnaires absolus</u>. On postule que les objets considérés (ch. II) comme des unités concrètes et égales, se laissent diviser en un nombre qcque de parties égales, non seulement dans un même objet, mais d'un objet à l'autre. Ce sont des <u>sous-unités</u> par rapport auxquelles les premières unités sont des <u>pluralités</u> (égales)

A ce point de vue, l'unité abstraite 1 sera considérée comme une pluralité de b sous-unités ($b > 1$) dont chacune sera représentée par $\frac{1}{b}$. $b\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{b}{b} = 1$. Numérateur, dénominateur.

Alors: tout nombre entier $a > 1$ est divisible par un nombre b, ou en b parties égales, et le quotient est $\frac{a}{b}$. $b\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{ab}{b} = a$

Multiplication: $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$.

Deux fractions $\frac{a}{b'}, \frac{a'}{b}$ sont égales quand $ab' = a'b$.

$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ Réduction à la plus simple expression

Réduction au même dénominateur.

Division: $\frac{a}{b} : d = \frac{a}{bd}$. $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Tout nombre peut être considéré comme fraction d'un autre nombre.

<u>Nombres fractionnaires relatifs</u>. Conception de deux séries opposées ou symétriques de nombres, doublant l'ensemble des n. rationnels. (Zahl und Gegenzahl: A et $\bar{A}$.)

Addition: $A + \bar{A} = 0$ $A + 0 = 0 + A = A$.

$\bar{A} + \bar{B} = \overline{A+B}$ $A + \bar{B} = \bar{B} + A = \begin{cases} A - B & \text{si } A > B \\ \overline{B - A} & \text{si } B > A \end{cases}$

Soustraction: L'équation: $X + B = A$

a pour solution: $X = A + \bar{B}$ $\bar{A} = 0 - A = -A$ (écriture)

Fraction systématique: $A = c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \dots + \frac{c_m}{e^m}$

e base de la numération; $c_1 c_2 \dots c_m$ chiffres donc tous $< e$



Le reste après le rang n est plus petit que $\frac{1}{e^n}$.

Prop. 1. Tout nombre rationnel A, ou bien est égal à une fraction systématique, ou bien il y a une série illimitée de chiffres c_1 $c_2 \dots c_n$ (qui ne sont pas tous nuls à partir d'un certain rang) telle que, si grand que soit n, on ait toujours:

$$c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \dots + \frac{c_n}{e^n} < A < c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \dots + \frac{c_n + 1}{e^n}$$

La série $c_1 c_2 \dots c_n$ est périodique, la période comprenant au plus $(b-1)$ chiffres (A étant mis sous la forme irréductible $\frac{a}{b}$.)

Prop. 2. Le nombre A est égal à une fraction systématique quand son dénominateur ne contient que des facteurs premiers de e.

Prop. 3. Si b est premier avec e, la période commence à c_1.

Prop. 4. Si b contient des fact. prem. de e et d'autres étrangers à e, la période est précédée de chiffres qui ne reparaissent plus dans le même ordre.

Propositions inverses.

V. Grandeurs absolues, relatives, continues.

Grandeurs absolues. (Grandeurs géométriques, abstraction faite de leur étendue; et grandeurs discrètes)

Propriétés nécessaires et suffisantes d'un système de grandeurs.

I. Deux grandeurs qcques sont égales ou inégales, et dans ce cas-ci, l'une est plus grande, l'autre plus petite.

II. Les grandeurs se laissent additionner et multiplier comme les nombres; en partic. la somme de 2 gr. est une grand. du système.

III. Si $A > B$, il y a une gr. X et une seule telle que $B + X = A$.

IV. Chaque grandeur A est divisible avec ou sans restriction en parties égales et semblables à elle-même, c.à.d. qu'il existe une grandeur X du même système, telle que $nX = A$, n étant un nombre qcque, ou seulement pour certains nombres n.

V. Si $A > B$, il y a un mult. de B pl. gr. que A; $pB > A$.

Tous ces postulats sont indépendants les uns des autres, et le 5e ne résulte pas des 4 premiers (P. du Bois Reymond, Unendliche der Functionen)

Les grandeurs qui vérifient les propriétés I–IV s'appellent absolues: proprement dites ou au sens étroit, si elles vérifient en outre V; improprement dites ou au sens large, dans le cas contraire.

Conditions que doit satisfaire un système de grandeurs:

1° Si $A = B$, $B = A$.

2° Si $A > B$, $B < A$.

3° La disjonction (égales ou inégales) doit être complète.

4° Si $A = B$, et $B = C$, $A = C$ (1er axiome de Euclide)

5° Si $A = B$, et $B > C$, $A > C$.

6° Si $A > B$, et $B > C$, $A > C$.

7° $(A+B) + C = A + (B+C)$

8° $A + B = B + A$

9° Si $A = A'$, $B = B'$, $A + B = A' + B'$ (2e axiome de Euclide)

10° Si $A > A'$, $B = B'$, $A + B > A' + B'$ (4e axiome de Euclide)

11° $A + B > A$ (8e axiome de Euclide)

La propriété V est appelée axiome d'Archimède (1)

— Grandeurs absolues au sens étroit commensurables & incommens.

Si A est multiple de M, M est dit mesure de A.

Si 2 grandeurs A et B de même espèce ont une commune mesure M, elles sont commensurables.

Si: $A = aM$, $B = bM$, $B = \frac{b}{a} A$.

Soit M' une autre commune mesure de A et B:

Si $A = a'M'$, $B = b'M'$, $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$.

Cette valeur commune est le rapport de A à B.

(1) De sphaera et cylindro, postulat 5; préface du De quadratura parabolae



La plus grande commune mesure de 2 grandeurs se trouve comme le plus grand commun diviseur de 2 nombres (algorithme d'Euclide)

Grandeurs relatives. Si l'on a défini deux systèmes de grandeurs absolus tels qu'à chaque grandeur de l'un corresponde une seule grandeur de l'autre, et si l'on pose la somme de ces 2 grandeurs égale à zéro, ces deux systèmes réunis forment, avec 0, un système de grandeurs relatives (proprement dites ou improprement dites)
Exemple de grandeurs relatives : les vecteurs de la géométrie moderne ; de même on peut avoir des angles, des surfaces, des volumes relatifs.

Systèmes continus de grandeurs absolues. L'espace et les grandeurs géométriques sont essentiellement continus
La continuité d'une ligne est telle qu'on la détruit non-seulement en supprimant un segment fini q.conque mais même en supprimant un point isolé sur cette ligne

Pour définir un système de grandeurs continues il faut ajouter aux propriétés I, II, III (p. 16) la suivante :
IV. Entre deux grandeurs inégales du système il en existe toujours une autre ; il y a toujours une grandeur plus grande et une plus petite que chaque grandeur donnée ; de sorte qu'il n'y en a aucune qui soit la plus grande ou la plus petite. C'est ce qu'on exprime en disant que le système a pour limite inférieure 0 et pour limite supérieure ∞.

Si dans un système continu Σ nous isolons un système Π compris entre 0 et A et ~~vérifiant~~ possédant les propriétés précédentes sans contenir toutes les grandeurs du système Σ, le système Π présentera en général des lacunes.
On dit qu'un système offre une lacune si l'on peut le partager en

deux groupes jouissant des propriétés suivantes :

1° Toute grandeur P du système appartient à l'un de ces groupes et à un seul.

2° Si P_1 est une grandeur du 1er groupe, il en est de même de toute grandeur $P < P_1$; si P_2 appartient au 2e groupe, il en est de même de $P > P_2$ (il s'ensuit nécessairement que $P_1 < P_2$)

3° Si P_1 est du 1er groupe il y a dans ce 1er groupe une grandeur supérieure à P_1, et si P_2 est du 2e groupe, il y a dans ce groupe une grandeur inférieure à P_2 (quels que soient P_1, P_2.)

Deux cas peuvent se présenter : ou bien la différence $P_2 - P_1$ (quelles que soient les grandeurs P_1 P_2 prises dans chacun des groupes) reste supérieure à une grandeur D du système Π, ou bien elle peut être plus petite que toute grandeur du système Π. Dans le second cas, la lacune s'appelle une coupure de Π.

Un système Π qui n'a que des coupures est dit connexe (zusammenhängend) Pour cela il suffit que les grandeurs de ce système vérifient l'axiome d'Archimède (V) En effet, si $P_2 - P_1 > D$, $P_1 + D$ appartient au 1er groupe, puis $P_1 + 2D, \dots P_1 + nD$; or en vertu de l'axiome, on peut trouver : $nD > P_2 - P_1$: $P_2 < P_1 + nD$ c.à.d. que P_2 appartiendrait au 1er groupe, ce qui contredit l'hypothèse.

Pour que le système Σ soit continu, il faut qu'il n'ait pas de lacunes. Cette condition n'est pas suffisante, car il se pourrait que les coupures d'un système partiel Π fussent comblées par plus d'une grandeur du système Σ. La condition nécessaire et suffisante est donc celle-ci :

Le système Σ est dit continu dans l'intervalle $(0, A)$, si l'on peut former avec les grandeurs de ce système des systèmes partiels Π connexes dans l'intervalle $(0, A)$ et tels qu'à chacune de leurs coupures corresponde une seule grandeur de Σ n'appartenant pas à Π, qui



soit plus grande que toutes les P_1 et plus petite que toutes les P_2.
Un système de grandeurs relatives est continu quand les deux systèmes de grandeurs absolues qui le composent ~~le~~ sont continus.

— Si un système de grandeurs jouit des propriétés I, II, III, IV, et est, de plus, continu, chaque grandeur est divisible en un nombre quelconque de parties égales et le système vérifie l'axiome d'Archimède.
Le système des nombres rationnels est convexe mais non continu.
On est donc amené à introduire les nombres irrationnels pour combler les coupures de ce système et le rendre continu (v. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen)

VI. Théorie des rapports d'après Euclide

Rapport en général: ensemble de deux grandeurs A, B dans un ordre déterminé. On définit le rapport arithmétique en disant que A : B est égal, supérieur ou inférieur à A' : B', suivant que A + B' est égal, supérieur ou inférieur à A' + B; et en définissant la somme de 2 rapports: $(A : B) + (A' : B') = (A + A') : (B + B')$
Le rapport arithmétique est une extension de la différence A − B au cas où $A \leqq B$. Il devient inutile par l'admission des grandeurs ~~négativ~~ relatives (positives et négatives)

Le rapport géométrique était indispensable aux anciens pour remplacer le nombre irrationnel. (Euclide, livre V, livre X, 5, 6)

L'idée que le rapport de deux grandeurs incommensurables est un nombre, inconnue des anciens, est apparue au XVIe siècle.
Newton, Arithmetica universalis: « Per numerum abstractam quantitatis cujusvis ad aliam ejusdem generis quantitatem quæ pro unitate habetur, rationem intelligimus. »

De même que les rapports de grandeurs commensurables correspondent à des nombres rationnels, on fait correspondre aux rapports de grandeurs incommensurables d'autres signes, qu'on appelle nombres irrationnels

On obtient ainsi un système continu de nombres, soumis aux règles du calcul arithmétique ; ce système est déduit d'un système continu de grandeurs absolues (C'est une théorie géométrique des nombres irrationnels.)

VII. Théorie arithmétique des nombres irrationnels (moderne)

Rappel des propositions de la p. 16. _ Définition de la limite d'après Cantor :

Une fraction systématique : $S_n = c_0 + \frac{c_1}{e} + \frac{c_2}{e^2} + \dots + \frac{c_n}{e^n}$

a pour limite un nombre rationnel α, si à tout nombre positif ε correspond un nombre positif μ, tel que l'on ait :

$$0 < \alpha - S_n < \varepsilon \quad \text{pourvu que :} \quad n > \mu$$

α est dit la limite de la suite indéfinie des nombres $S_0, S_1, S_2, \dots S_n$, et l'on écrit : $\alpha = \lim_{n=\infty} S_n$

Plus généralement, soit φ_n une expression rationnelle dépendant de l'entier n ; si à chaque n. pos. rat. ε correspond un n. rat. pos. μ tel qu'on ait toujours : $|\alpha - \varphi_n| < \varepsilon$

à la condition que : $n > \mu$, le nombre rationnel α est appelé la limite des nombres $\varphi_0 \varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_n$ quand n croît indéfiniment ; on écrit : $\alpha = \lim_{n=\infty} \varphi_n$

La limite α peut être 0 ; on a alors : $|\varphi_n| < \varepsilon$.

Si les nombres $\varphi_0 \varphi_1 \dots \varphi_n$, quand n croît indéfiniment, deviennent plus grands que ~~un~~ tout nombre pos. rat. γ, on écrit :

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n = \infty$$

ce qui signifie qu'à tout n. pos. rat. γ correspond un nombre semblable μ tel que l'on a toujours : $\varphi_n > \gamma$, pourvu que $n > \mu$

On écrit au contraire : $\lim_{n=+\infty} \varphi_n = -\infty$

si l'on a : $\varphi_n < -\gamma$ pour tout $n > \mu$



Quand une suite a une limite rationnelle ~~xx~~ à tout n pos. rat. ε correspond un n semblable μ tel que $|\varphi_{n+r} - \varphi_n| < \varepsilon$ pourvu que $n > \mu$, quel que soit le nombre entier positif r.
Cette condition est nécessaire mais non suffisante. Une fraction systématique n'a pas de limite rationnelle si elle n'est pas périodique.
Exemple : $\varphi_n = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \dots + \frac{1}{10^{\frac{n(n+1)}{2}}}$ $(0,1010010001\dots)$

Considérons donc une suite φ_n convergente c.à.d. jouissant de la seconde propriété : $|\varphi_{n+r} - \varphi_n| < \varepsilon$ pourvu que $n > \mu$.

Prop. 1. Trois cas peuvent se présenter, quand n croît indéf. $(> \mu)$:
1° Oubien : $|\varphi_n| < \varepsilon$;
2° Oubien : $\rho < \varphi_n < \rho'$; ρ, ρ' nombres rationnels pos.
3° Oubien : $-\rho' < \varphi_n < -\rho$, $-\rho, -\rho'$ nombres rat. nég.
En effet, on a par hypothèse : $\varphi_m - \varepsilon < \varphi_{m+r} < \varphi_m + \varepsilon$
pour $r = 1, 2, 3 \dots\dots$
Le criterium ne ~~permet pas toujours~~ de décider après un nombre fini d'essais (il faut essayer des ε de plus en plus décroissants)

Prop. 2 : Si les φ_n vérifient la condition de convergence, les $\gamma \pm \varphi_n$, les $\gamma\varphi_n$ la vérifient aussi, γ étant un nombre rationnel qcque différent de 0. — Les nombres $\frac{1}{\varphi_n}$ la vérifient aussi, pourvu que $\lim \varphi_n \gtrless 0$; si $\lim \varphi_n = 0$, $\lim \frac{1}{\varphi_n} = \pm\infty$, si les φ_n ont ~~le~~ ou même signe à partir d'un certain rang.
Si les ψ_n vérifient la même condition, les suites : $\varphi_n \pm \psi_n$, $\varphi_n\psi_n$ ~~est~~ sont encore convergentes. La suite $\varphi_n : \psi_n$ l'est aussi, pourvu que : $\lim \psi_n \gtrless 0$.

Prop. 3. Si les φ_n ont une limite rationnelle α, les $\gamma \pm \varphi_n$ ont pour limite $\gamma \pm \alpha$, les $\gamma\varphi_n$ pour limite $\gamma\alpha$, et si $\lim \varphi_n \gtrless 0$,

les $\frac{1}{\varphi_n}$ ont pour limite le nombre rationnel $\frac{1}{\alpha}$.

Si les ψ_n ont une limite rationnelle β, les $\varphi_n \pm \psi_n$, $\varphi_n \psi_n$ ont pour limites respectives $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$, et si $\beta \gtrless 0$, les $\varphi_n : \psi_n$ ont pour limite $\alpha : \beta$.

Définition des nombres irrationnels. Une suite convergente φ_n, qui n'a pas de limite rationnelle, définit un nombre irrationnel fixe, distinct de tous les termes de cette suite, et qu'on désignera par (φ_n). On représentera de même par (φ_n) la limite rationnelle d'une suite convergente, quand cette limite existe.

Les propositions 1 et 2 permettent de comparer ces nouveaux nombres aux nombres rationnels, et de les concevoir comme des grandeurs qui s'intercalent parmi les nombres rationnels pour former le système des nombres réels.

1e Définition : $(\varphi_n) = (\psi_n)$, si : $\lim (\varphi_n - \psi_n) = 0$

2e Définition : $(\varphi_n) > \alpha$, si $\varphi_n - \alpha > \rho$ (ρ pos. rat.) quand $n > \mu$

3e Définition : $(\varphi_n) > (\psi_n)$, si $\varphi_n - \psi_n > \rho$ (ρ pos. rat.) quand $n > \mu$

Ces définitions satisfont aux conditions formelles de la p. 1.

La 2e permet de définir les nombres irrationnels positifs et négatifs : $(\varphi_n) > 0$, $(\varphi_n) < 0$.

Corollaires. 1° Si dans la suite des nombres 0, 1, 2, ... on choisit une autre suite $k_1, k_2 \dots k_n$, on a : $(\varphi_n) = (\varphi_{k_n})$

2° Si pour $n > \mu$ on a : $\varphi_n > \alpha$, on a : $(\varphi_n) \geqq \alpha$.
$\varphi_n < \alpha$, $(\varphi_n) \leqq \alpha$.

3° Si pour $n > \mu$ on a : $\varphi_n > \psi_n$, on a : $(\varphi_n) \geqq (\psi_n)$.



4° A chaque nombre rationnel $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\mu > 0$, tel que: $\varphi_n - \varepsilon < (\varphi_n) < \varphi_n + \varepsilon$ pourvu que $n > \mu$.

Entre deux nombres réels quelconques (inégaux) est compris un nombre illimité de nombres rationnels.

5° Un nombre (φ_n) dont la valeur absolue est plus petite que tout nombre positif, est nul. (La valeur absolue de zéro est 0)

6° Si les φ_n ne décroissent jamais quand n croît, (φ_n) est plus grand que tout φ_n.

7° Si l'on considère une fraction systématique définissant un nombre irrationnel c, on a: $S_n < c < S_n + \frac{1}{e^n}$ (e base)

Définition du nombre $e = (\varphi_n)$ $\varphi_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$

Addition des nombres irrationnels:

$\alpha + (\varphi_n) = (\varphi_n) + \alpha = (\varphi_n + \alpha)$ $(\varphi_n) + (\psi_n) = (\varphi_n + \psi_n)$

Ces définitions concordent avec le cas où les limites (φ_n), (ψ_n) sont rationnelles. – L'addition des nombres réels est soumise aux mêmes règles que celle des nombres rationnels.

Soustraction: $(\varphi_n) - \alpha = (\varphi_n - \alpha)$, $\alpha - (\varphi_n) = (\alpha - \varphi_n)$ $(\psi_n) - (\varphi_n) = (\psi_n - \varphi_n)$

Si: $(\varphi_n) + (\psi_n) = (\varphi_n + \psi_n) = 0$, $(\psi_n) = -(\varphi_n)$ N. symétriques.

En particulier: $(-\varphi_n) = -(\varphi_n)$

La soustraction est possible et univoque dans tous les cas

Corollaires: 1° Deux nombres réels dont la différence est en valeur absolue inférieure à tout nombre positif ε sont égaux.

2° Soit (φ_n) un nombre réel. A chaque n. pos. ε correspond un n. pos. μ tel que: $|(\varphi_n) - \varphi_n| < \varepsilon$ pourvu que $n > \mu$.

On peut donc considérer le nombre irrationnel (φ_n) comme la limite de la suite φ_n quand n croît indéfiniment

$(\varphi_n) = \lim. \varphi_n$, quand $\lim. n = \infty$.

Multiplication. $\alpha(\varphi_n) = (\varphi_n)\alpha = (\alpha\varphi_n)$

$$0.(\varphi_n) = (\varphi_n).0 = 0.$$

$$(\varphi_n).(\psi_n) = (\varphi_n\psi_n)$$

La multiplication des nombres réels obéit aux mêmes règles que celle des nombres rationnels.

Division $\alpha : (\varphi_n) = \left(\frac{\alpha}{\varphi_n}\right)$ $(\psi_n) : (\varphi_n) = \left(\frac{\psi_n}{\varphi_n}\right)$

$$(\varphi_n) : \alpha = \left(\frac{\varphi_n}{\alpha}\right)$$

La division est toujours possible et univoque sauf quand le diviseur est nul.

Les nombres réels sont donc absolument analogues aux nombres rationnels dans les 4 opérations de l'arithmétique. Ils vérifient comme eux l'axiome d'Archimède.

Le système des nombres réels compris entre deux quelconques d'entre eux est continu. En effet, toute coupure d'un système partiel est remplie par un nombre irrationnel.

Une suite convergente de nombres irrationnels a pour limite un nombre réel.

Tout nombre irrationnel peut se représenter par une fraction systématique.

Valeurs décimales approchées par défaut ou par excès.

Rapports des grandeurs continues relatives.

Si l'on fait correspondre à une grandeur E le nombre 1 (E s'appelle l'unité), à toute grandeur A commensurable avec E :

$$A = \pm aM \qquad E = bM$$

on fera correspondre le nombre rationnel $\pm \frac{a}{b}$.



A toute grandeur B incommensurable avec E correspond un nombre irrationnel unique <u>b</u>, qu'on appelle le rapport de B à E. Si : $\alpha_1 E < B < \alpha_2 E$

on a : $\alpha_1 < b < \alpha_2$.

On pose : $B = bE$ (ce n'est pas un produit)

Inversement, à tout nombre irrationnel <u>b</u> correspond une grandeur B et une seule, plus grande que toutes les $\alpha_1 E$ et plus petite que toutes les $\alpha_2 E$, si : $\alpha_1 < b$, $\alpha_2 > b$ (en vertu de la continuité du système de grandeurs ; car autrement il y aurait une coupure ds ce système)

Soit $(\psi_n) = b$. Si l'on a trouvé une grandeur B telle qu'à tout nombre rationnel $\varepsilon > 0$ corresponde un nombre $\mu > 0$ et qu'on ait, pour tout $n > \mu$, $(\psi_n - \varepsilon) E < B < (\psi_n + \varepsilon) E$, B est la grandeur correspondante au nombre <u>b</u>.

Si les rapports $A : B$ et $A' : B'$ sont égaux (οἱ λόγοι, non ὅροι, au sens d'Euclide) les nombres correspondants sont identiques.

Car ~~on a~~ si l'on a (α_1 α_2 étant des nombres rationnels) :

$$\alpha_1 B < A < \alpha_2 B$$

on a aussi : $\alpha_1 B' < A' < \alpha_2 B'$

Donc si : $\alpha_1 < p < \alpha_2$

on a aussi : $\alpha_1 < p' < \alpha_2$

d'où l'on conclut : $p = p'$.

VIII. Puissances, racines, logarithmes.

Extension du concept de puissance aux exposants rationnels. Cherchons une fonction de la variable réelle x qui satisfasse la relation :

$$f(x)\,f(y) = f(x+y)$$

Si $y=0$: $\quad f(0) = 1 \quad$ (en excluant : $f(x) = 0$.)

$$f(x_1)\,f(x_2)\ldots f(x_n) = f(x_1+x_2+\ldots+x_n)$$

$$f(nx) = \left[f(x)\right]^n$$

$$f(n) = \left[f(1)\right]^n \qquad \left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n = f(1)$$

Pour que $f\left(\frac{1}{n}\right)$ soit réelle pour toute valeur de n (paire ou impaire) il faut et il suffit que $f(1)$ soit un nombre positif :

Posons : $\quad f(1) = a$; $\quad f(n) = a^n \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt[n]{a}$.

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}.$$

IX. Les variables réelles et leurs fonctions.

Si la variable prend des valeurs plus grandes que tout nombre positif donné, on dit qu'elle a pour limite supérieure ou pour valeur-limite $+\infty$, ou qu'elle devient infinie car elle n'a pas de valeur plus grande que toutes les autres. — Mais même quand la variable garde une valeur finie (a une limite supérieure finie) elle peut n'avoir aucune valeur plus grande que toutes les autres (ex : $1 - \frac{1}{n}$.)

Définition de la limite supérieure ; démonstration de son existence (On l'enferme entre deux suites de nombres rationnels (décimaux) qui comprennent toujours au moins une des valeurs de x ; ou bien cette valeur finit par être un de ces nombres rationnels, ou bien il y a toujours des valeurs de x dans l'intervalle décroissant ; alors les 2 suites définissent un nombre irrationnel : si ce nombre appartient à l'ensemble des valeurs



de x, il est le maximum de x ; sinon, il n'est une valeur-limite au sens propre. Par ex : $\lim\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1$.)

Ce procédé permet d'établir théoriquement l'existence de la limite, mais non de la calculer pratiquement (par un nombre fini d'opérations)

Limite inférieure. Variable finie. Intervalle fini.

Une variable est continue quand elle ~~prend~~ toutes les valeurs réelles de cet intervalle. dans un intervalle fini

Une variable est partout condensée (allenthalben überalldicht) dans un intervalle, si dans chaque intervalle partiel se trouve au moins une valeur de cette variable.

Fonctions univoques et plurivoques d'une variable réelle.

Remarque. Une fonction d'une variable susceptible d'un nombre infini de valeurs ne peut être ~~définie~~ donnée que par une définition arithmétique.

Quand une fonction $f(x)$ n'est pas définie pour une certaine valeur $x = a$, et que l'inverse : $\frac{1}{f(x)}$ a pour $x = a$ la valeur 0, on dit que la fonction $f(x)$ est infinie pour $x = a$: $f(x) = \infty$. On ne donne pas de signe à ∞, pour le distinguer de l'indéfini numérique $\pm\infty$. (Cantor : dist. der 2 infinis)

De même, une fonction : $f\left(\frac{1}{y}\right) = \varphi(y)$ n'est pas définie pour $y = 0$ par la formule $f(x)$. Mais si $\varphi(0) = b$, on dit que $f(x)$ est définie pour $x = \infty$, et on écrit : $f(\infty) = b$.

Si $\varphi(0)$ n'est pas définie, mais qu'on ait : $\frac{1}{\varphi(0)} = 0$, on dit que $f(x)$ est infinie pour $x = \infty$: $f(\infty) = \infty$.

Par ex : pour $f(x) = x^{-\mu}\ (\mu > 0)$ $f(0) = \infty$, $f(\infty) = 0$.

pour $f(x) = x^{\mu}$, $f(0) = 0$, $f(\infty) = \infty$.

Valeurs limites des fonctions. Définitions des expressions :

$$\lim_{x=a+0} f(x) = b \qquad \lim_{x=a-0} f(x) = b$$

$$\lim_{x=\pm\infty} f(x) = b \qquad \lim_{x=a} f(x) = b \qquad \lim_{x=a\pm 0} f(x) = \pm\infty$$

D'où les symboles : $f(a+0)$, $f(a-0)$, $f(\pm\infty)$

<u>Limites d'indétermination</u> O et U d'une fonction $f(x)$ quand x tend vers a par des valeurs supérieures : $\lim x = a+0$.

A tout nombre $\varepsilon > 0$ correspond un $\delta > 0$, tel que

$$f(x) < O + \varepsilon \qquad \text{pourvu que} \qquad a < x < a + \delta$$

mais que dans tout intervalle (a, x_0) où : $a < x_0 < a + \delta$, il y ait au moins une valeur x_1 de x pour laquelle on ait :

$$f(x_1) > O - \varepsilon$$

A tout nombre $\varepsilon > 0$ correspond un $\delta > 0$, tel que

$$f(x) > U - \varepsilon \qquad \text{pour tout} \qquad a < x < a + \delta$$

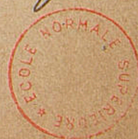
mais que dans tout intervalle (a, x_0) où : $a < x_0 < a + \delta$, il y ait au moins une valeur x_1 de x pour laquelle on ait :

$$f(x_1) < U + \varepsilon$$

Si les nombres O et U sont égaux, $f(x)$ a, pour $\lim x = a+0$, une valeur limite finie qui est leur valeur commune, et réciproq[t].

Donc, la condition nécessaire et suffisante pour que $f(x)$ ait une valeur limite finie, pour $\lim x = a+0$, est la coïncidence des deux limites d'indétermination O et U ; ou encore :

[à tout nombre $\varepsilon > 0$ doit correspondre un nombre $\delta > 0$, tel que pour tout couple de valeurs x, x' de la variable prises dans l'intervalle $(a, a+\delta)$, on ait : $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$.
(<u>Principe général de convergence</u>, de P. du Bois-Reymond.)



Exemples : $f(n) = (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$ pour $\lim n = +\infty$, $O = +1$, $U = -1$.

$f(n) = (-1)^n n$ pour $\lim n = +\infty$, $O = +\infty$, $U = -\infty$.

$f(n) = n\left[1+(-1)^n\right]$ pour $\lim n = +\infty$, $O = +\infty$, $U = 0$.

Fonctions continues.

La fonction univoque $f(x)$, définie pour toutes les valeurs réelles d'un intervalle $(a-d, a+d)$, est dite continue pour $x = a$ si pour le passage continu à la limite : $\lim x = a \pm 0$

on a : $$\lim f(x) = f(a)$$

c.à.d. si à tout nombre $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\delta > 0$ tel que : $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ si $|x - a| < \delta$.

(On définit des limites d'indétermination de $f(x)$ pour $x - a$, en considérant les intervalles $(a-\xi, a+\xi)$; pour que $f(x)$ soit continue pour $x = a$, il faut et il suffit que ces limites d'ind. soient égales)

Si pour : $\lim x = a+0$ $(a-0)$, on a : $\lim f(x) = f(a)$ on dit encore que la fonction est continue d'un seul côté.

Si pour : $\lim x = a \pm 0$ $\lim f(x) = \infty$, discontinuité.

$f(x)$ peut être continue pour $x = \infty$, si $f(\infty)$ est finie et si pour : $\lim x = \infty$ on a : $\lim f(x) = f(\infty)$.

Toute fonction rationnelle $R(y_1 y_2 \dots y_n)$ où l'on substitue à y_k une fonction $f(x)$ continue pour $x = a$, est aussi continue (en x) pour $x = a$, si son dénominateur ne s'annule pas quand on y fait $y_k = f(a)$.

Si une fonction $f(x)$ est définie d'une manière univoque dans l'intervalle fini (a, b), si elle est continue pour toutes les valeurs de cet intervalle, et si $f(a) \gtrless f(b)$, il existe au moins une

valeur c entre a et b, telle que : $f(c) = h$, ~~$f(c)$~~ h étant une valeur donnée comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

Toute fonction continue dans un intervalle (a, b) atteint sa limite supérieure et sa limite inférieure : elle a un maximum et un minimum.

Si une fonction $f(x)$ est uniforme et continue pour toutes les valeurs de l'intervalle (a, b), y compris les limites a, b, la fonction est continue dans l'intervalle (a, b), c.à.d. qu'à tout nombre $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\delta > 0$ tel que $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ pourvu que $|x' - x''| < \delta$, x' et x'' appartenant à l'intervalle (a, b).

Les grandeurs infiniment petites. (= ayant pour limite 0.)

Première théorie : les moments des fonctions. (Newton, Principia mathematica philosophiae naturalis, lib. II, lem. II.)

On considère le passage continu à la limite de la variable : $\lim x = a + 0$, et l'ensemble des fonctions qui pour ce passage deviennent infiniment petites en restant toujours positives : $\lim f(x) = +0$.

1e Définition. A chaque fonction $f(x)$ de ce système on fait correspondre un nouvel objet $m(f)$, le moment de la fonction.

2e Définition. On pose : $m(f) = m(g)$ si $\lim \frac{f}{g} = 1$.

3e Définition. On pose : $m(f) > m(g)$ si $\lim \frac{f}{g} > 1$ (y compris $+\infty$) ; et : $m(f) < m(g)$ si $\lim \frac{f}{g} < 1$ (y compris 0.) (Les conditions du ch. I sont vérifiées.)

4e Définition. $m(f+g) = m(f) + m(g)$

Cette définition est légitime, car puisque : $\lim f = \lim g = +0$ on a aussi : $\lim (f+g) = +0$.

Elle vérifie d'ailleurs les conditions de l'addition (ch. II.)



$m(f)+m(g)$ est égal ou supérieur à $m(f)$, suivant que
$\lim \frac{g}{f}$ est nulle ou non nulle

Si $m(f) > m(f_1)$, on a : $m(f)+m(g) \geqq m(f_1)+m(g)$

Le signe = a lieu quand : $\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f_1}{g} = +0.$

Soustraction : Si : $m(f) > m(g)$,
l'équation : $m(g)+x = m(f)$ $[x = m(f)-m(g)]$
a une solution et une seule : $x = m(f-g) < m(f)$

Si $m(f) = m(g)$, la différence $m(f)-m(g)$ n'a pas de sens, car l'équation est vérifiée par tout moment : $m(h)$
dit que : $\lim \frac{h}{f} = 0.$
c.à.d. par une infinité de moments inégaux.

En vertu de la règle d'addition, $n.m(f) = m(nf)$

Si : $m(g) < m(f)$, il n'y a pas toujours un nombre entier p
tel que $p.m(g) > m(f)$ car si : $\lim \frac{g}{f} = 0$,
on a encore : $\lim \frac{pg}{f} = 0$, quel que soit l'entier p.
(L'axiome d'Archimède n'est donc pas vérifié.)

Multiplication (5e définition) $m(fg) = m(f).m(g)$
cette définition est légitime, car puisque $\lim f = \lim g = +0$, $\lim fg = +0$.
D'ailleurs elle vérifie les conditions et les règles de la mult^on^ (ch. II.)

L'équation : $m(g).x = m(f)$
a une solution et une seule : $x = m\left(\frac{f}{g}\right)$
seulement quand : $\lim \left(\frac{f}{g}\right) = 0.$

Extension du système des moments (application du ch. III.)

6e Définition : Si : $\lim \left(\frac{f}{g}\right) > 0$ (y compris $+\infty$)
il existe un nouvel objet, désigné par $\frac{m(f)}{m(g)}$, qui vérifie l'éq :
$m(g).x = m(f)$

7e Définition $\frac{m(f)}{m(g)}$ sera égal, supérieur, inférieur à $\frac{m(f_1)}{m(g_1)}$
suivant que $m(f).m(g_1)$ sera égal, supérieur inférieur à $m(f_1).m(g)$
c.à.d suivant que $\lim\left(\frac{fg_1}{f_1g}\right)$ sera égale, supérieure, inférieure à 1.

$\frac{m(f)}{m(g)}$ sera plus grand que tout moment $m(f_1)$. En effet:

$$m(f) > m(f_1).\,m(g)$$

puisque: $\lim(f : f_1g) = +\infty$.

8e Définition $\frac{m(f)}{m(g)} \times m(h) = \frac{m(fh)}{m(g)}$

$$\frac{m(f)}{m(g)} \times \frac{m(f_1)}{m(g_1)} = \frac{m(ff_1)}{m(gg_1)}$$

Si $\lim\left(\frac{f}{g}\right)$ a une valeur positive finie, on pose:

$$\frac{m(f)}{m(g)} = \lim\left(\frac{f}{g}\right)$$

de sorte que l'extension du système des moments se compose de l'ensemble des nombres absolus et des grandeurs $\frac{m(f)}{m(g)}$ pour lesquelles $\lim\left(\frac{f}{g}\right) = +\infty$.

Extension de l'addition: (9e définition) $\frac{m(f)}{m(g)} + m(h) = \frac{m(f+gh)}{m(g)}$

$$\frac{m(f)}{m(g)} + \frac{m(f_1)}{m(g_1)} = \frac{m(fg_1 + f_1g)}{m(gg_1)}$$

Si $\frac{m(f)}{m(g)}$ a une valeur finie, on a simplement:

$$\frac{m(f)}{m(g)} + m(h) = \frac{m(f)}{m(g)}$$

car si $\lim\left(\frac{f}{g}\right) > 0$, on a: $\lim\left(\frac{f+gh}{g} : \frac{g}{f}\right) = \lim\left(1 + \frac{gh}{f}\right) = 1.$

D'où la règle fondamentale du calcul des infiniments petits, que nous retrouvons ainsi par la méthode arithmétique.



« Une grandeur finie ne change pas, quand on lui ajoute une grandeur infiniment petite. »

On ne peut pas généraliser la soustraction des moments comme on a généralisé leur division, et obtenir ainsi un système de moments relatifs ; car les différences $\alpha-\alpha$ et $\alpha-\beta$ $(\beta>\alpha)$ n'ont pas de sens.

Deuxième théorie

Considérons le même système de fonctions ayant pour limite $+0$ pour le passage à la limite : $\lim x = a+0$.

Toute fonction rationnelle de ces fonctions a une limite pour le même passage de x à la limite.

On dit que : $m(f)$ est égal, supérieur ou inférieur à $m(g)$ suivant que : $\lim\left(\frac{f}{g}\right)$ est un nombre positif fini, l'infini ou zéro.

Somme : $m(f)+m(g)=m(fg)$

Le système de ces nouveaux moments appartient aux grandeurs absolues au sens large du mot (ch. V) Il ne vérifie pas l'axiome de Archimède : $m(x)<m(e^{-\frac{1}{x}})$

$$p.m(x)=m(x^p)<m(e^{-\frac{1}{x}})$$ quel que soit l'entier p

[P. du Bois-Reymond, Unendlich der Functionen, Journal Borchardt t. 70 ; Mathematische Annalen t. XI.

X. Séries infinies à termes réels.

Du principe général de convergence (p. 29) résulte la proposition : La condition nécessaire et suffisante pour que la série : $a_0 + a_1 + \ldots$ soit convergente (c.à.d. pour que sa somme S_n ait une limite) est qu'à chaque nombre positif ε corresponde un nombre entier μ tel, que, si $n > \mu$, on ait : $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+r}| < \varepsilon$ quel que soit le nombre entier r.

En effet, pour que : $\lim S_n = a$ pour $\lim n = +\infty$, il faut et il suffit que pour tout $n > \mu$ $|S_{n+r} - S_n| < \varepsilon$ quel que soit r.

P. du Bois-Reymond a déduit les critères de convergence et de divergence des séries à termes positifs d'une source commune. (Journal de Borchardt, t. 76.)

La série infinie

$$\sum_0^\infty [\psi(n) - \psi(n+1)]$$

est convergente, si $\lim \psi(n)$ existe et est finie ; divergente, si cette limite est infinie, ou si elle n'existe pas (Sn a alors deux limites d'indétermination 0 et U, cf. p. 29.)

Prenons pour $\psi(n)$ une fonction monotone, c.à.d. qui ne fait que croître ou décroître quand n croît : tous les termes de cette série seront de même signe. Prenons une suite de nombres γ_n de même signe : la série infinie :

$$\sum_0^\infty \gamma_n [\psi(n) - \psi(n+1)]$$

est convergente, si $\lim \psi(n)$ est finie et si tous les $|\gamma_n|$ sont inférieurs à un nombre $C > 0$; elle est divergente, si $\lim \psi(n)$ est infinie, et si les $|\gamma_n|$ dépassent un nombre positif C'.

Critères de la première espèce. Soit a_{n+k} le terme général d'une série donnée. On pose :

$$a_{n+k} = \gamma_n [\psi(n) - \psi(n+1)]$$



Si l'on prend pour $\psi(n)$ une fonction monotone à limite finie la série sera convergente, pourvu que: $\gamma_n = \frac{a_{n+k}}{\psi(n) - \psi(n+1)}$ reste en valeur absolue inférieur à un nombre C; en particulier, si $\lim \gamma_n$ n'est pas infini —

Si l'on prend pour $\psi(n)$ une fonction monotone à limite infinie la série sera divergente, pourvu que (γ_n) soit supérieur à un nombre positif C'; en particulier, si $\lim \gamma_n$ n'est pas nulle.

Si la fonction $\psi(n)$ est toujours décroissante et si $\lim \psi(n) = 0$, la série sera convergente, si: $\lim \frac{a_{n+k}}{\psi(n) - \psi(n+1)} \geq 0$ mais n'est pas $+\infty$.

Si la fonction $\psi(n)$ est toujours croissante et si $\lim \psi(n) = \infty$, la série sera divergente si: $\lim \frac{a_{n+k}}{\psi(n) - \psi(n+1)} > 0$

On forme des suites de critères subordonnés de conv. ou de divergence.

La série Σa_n est convergente, si l'on peut trouver un nombre pos. μ, tel que pour $\lim n = +\infty$ une des expressions:

$$a_{n+k} e^{\mu n}, \quad a_{n+k} n^{1+\mu}, \quad a_{n+k} n (\log n)^{1+\mu}, \ldots\ldots$$

$$a_{n+k} L_{r-1}(n) (\log_r n)^{1+\mu}, \ldots\ldots$$

ait une valeur limite finie (positive ou nulle)

La série Σa_n est divergente, si l'on peut trouver un nombre pos. μ, tel que pour $\lim n = +\infty$ une des expressions:

$$a_{n+k} e^{-\mu n}, \quad a_{n+k} n^{1-\mu}, \quad a_{n+k} n (\log n)^{1-\mu}, \ldots\ldots$$

$$a_{n+k} L_{r-1}(n) (\log_r n)^{1-\mu}, \ldots\ldots$$

ait une limite positive (non nulle) —— ou si une des expressions; $a_{n+k}, \; a_{n+k} n, \; a_{n+k} n \log n, \ldots \; a_{n+k} L_{r-1}(n), \ldots\ldots$ a une limite positive non nulle $\Big[\log_3 n = \log \log \log n$ ——

$L_r(n) = n \log n . \log_2 n \ldots\ldots \log_r n.$

Criterium de convergence de seconde espèce

En posant : $\gamma_n = \dfrac{1}{\lambda_n}$, $\psi(n) = a_{n+k}\,\varphi(n)$

il vient : $\lambda_n = \varphi_n - \dfrac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\varphi(n+1)$

La série Σa_n est convergente, si $\varphi(n)$ est positive et si pour tout $n \geqq m$, λ_n est supérieur à un nombre $\alpha > 0$; (en particulier, si $\lim \lambda_n > 0$.)

Criterium de divergence de seconde espèce

Soit $\varphi(n)$ un nombre positif tel, que la série $\Sigma \dfrac{1}{\varphi(n)}$ soit divergente ; la série Σa_n est divergente, si pour tout $n \geqq m$, λ_n est négatif (en particulier si $\lim \lambda_n < 0$.)

On obtient ainsi, en prenant le même $\varphi(n)$, un criterium disjonctif : convergence pour $\lim \lambda_n > 0$, divergence pour $\lim \lambda_n < 0$, incertitude pour $\lim \lambda_n = 0$.

Si l'on prend une suite de critères subordonnés :

$$\varphi_0(n) = 1,\quad \varphi_1(n) = n \quad \varphi_2(n) = n \log n,\ \ldots\ldots$$
$$\varphi_r(n) = L_{r-1}(n),\ \ldots\ldots$$

on obtient les critères logarithmiques de seconde espèce :

La série Σa_n est convergente ou divergente, suivant que, pour $\lim n = +\infty$, $\lim\left(1 - \dfrac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\right)$ est positive ou négative ;

que : $\lim\left(n - \dfrac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}(n+1)\right)$ est positive ou négative ;

ou, en gén. que : $\lim\left[L_r(n) - \dfrac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} L_r(n+1)\right]$ est positive ou négative.

Le 1er criterium est bien connu : suivant que $\lim \dfrac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} >$ ou < 1.



Le 2e criterium équivaut au criterium de Raabe (au cas où le 1er est insuffisant, c.à.d. où : $\lim \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}} = 1$) : suivant que : $\lim . n\left(1 - \frac{a_{n+k+1}}{a_{n+k}}\right) >$ ou < 1.

Séries dont les termes sont des fonctions de x : $\Sigma f_n(x)$.

$S_n(x)$ est une fonction de 2 variables indépendantes $\underline{n}$ et $\underline{x}$.

On pose : $\lim S_n(x) = f(x)$

Convergence uniforme et non uniforme dans un certain intervalle assigné à x. Soit $r_n(x)$ le reste de la série après le n^e terme ($f = S_n + r_n$)

La série est uniformément convergente pour tout l'intervalle (a, b) si à chaque nombre $\varepsilon > 0$ correspond un nombre $\mu > 0$, tel que pour tout $n > \mu$ on ait : $|r_n(x)| < \varepsilon$ quelle que soit la valeur attribuée à x dans l'intervalle (a, b).

Si toutes les fonctions $f_n(x)$ sont continues dans l'intervalle (a, b) et si la série converge uniformément dans cet intervalle, sa limite $f(x)$ est une fonction continue de $\underline{x}$ ds l'intervalle (a, b) y compris les limites.

La réciproque n'est pas vraie : la somme $f(x)$ peut être continue ~~dans tout~~ pour toutes les valeurs de l'intervalle (a, b) et la série peut néanmoins n'être pas uniformément convergente. Ex :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2} - \frac{(n+1)x}{1 + (n+1)^2x^2} = x \frac{n(n+1)x - 1}{(1 + n^2x^2)\left[1 + (n+1)^2x^2\right]}$$

$f(x) = 0$ pour $0 \leq x \leq 1$. $r_{n-1}(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$

P. du Bois Reymond, Cantor : Math. Annalen, ~~XII, XVI~~

Séries suivant les puissances positives entières d'une variable.
Théorèmes d'Abel.



Note sur le sophisme de la série géométrique : $S = 1 + x + x^2 + \ldots$

$Sx = x + x^2 + x^3 + \ldots$ donc, dit-on : $(1-x)S = 1$ $S = \dfrac{1}{1-x}$

Pour $x = -1$, on trouve : $S = \dfrac{1}{2}$; donc :

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 0 + 0 + 0 + \ldots$$

Guido Grandi expliquait par là la création du monde ex nihilo

(L'erreur consiste à considérer la somme $1 + x + x^2 + \ldots$ comme existant sans restriction.)

40

XI. Séries représentant la fonction exponentielle, la puissance et le logarithme

Stolz, 2e volume 1886. Ch. I. Théorie analytique des nombres complexes.

L'équation : $x^2 = -1$ n'ayant pas de racine réelle, on cherche à étendre le système des nombres de manière à ~~vérifier~~ résoudre cette équation & d'autres semblables, et de telle sorte que les règles du calcul des nombres réels subsistent pour les nouveaux nombres. Cela est possible, et d'une seule manière : nombres complexes : $a + bi$.

Considérons plus généralement les nombres complexes à 2 unités $e_1 e_2$: $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$

1e Définition. $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$ si : $\alpha_1 = \beta_1$ $\alpha_2 = \beta_2$ et dans ce cas seulement. 卐

2e Définition. $(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) + (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) = (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + (\alpha_2 + \beta_2) e_2$

Cette définition de la somme vérifie les conditions formelles de l'addition. La soustraction des nombres complexes est tjrs possible et univoque.

$$\rho a = \rho(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) = (\rho \alpha_1) e_1 + (\rho \alpha_2) e_2$$

$$(\rho + \sigma) a = \rho a + \sigma a \qquad \rho(a+b) = \rho a + \rho b$$

3° Multiplication. Pour que le produit de 2 nombres complexes soit un nombre complexe de même forme, il faut que les produits : $e_1 e_1$, $e_1 e_2$, $e_2 e_1$, $e_2 e_2$ soient des nombres complexes. (en vertu de la loi distributive.) En vertu des lois commutative et associative, les produits d'unités doivent vérifier les formules :

$$a.b = b.a \qquad (a.b).c = a.(b.c)$$

Si l'on pose : $e_1 e_1 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ $\qquad e_2 e_2 = \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2$

$$e_1 e_2 = e_2 e_1 = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$$

Pour que le système de nombres complexes ainsi défini n'ait qu'un seul

---

卐 $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0$ si $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, et alors seulement.

$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 > \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$, si $\alpha_1 > \beta_1$, ou si $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 > \beta_2$.

$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 < \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$, si $\alpha_1 < \beta_1$, ou si $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 < \beta_2$.

module de multiplication e (tel que : $ae = ea = a$) il faut et il suffit que l'un des 3 déterminants suivants ne soit pas nul :

$$\Lambda = \mu_1 \nu_2 - \nu_1 \mu_2 \qquad M = \nu_1 \lambda_2 - \lambda_1 \nu_2 \qquad N = \lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2$$

Systèmes de nombres à deux unités, admettant une multiplication distributive, associative et commutative sans module.

3 sortes, caractérisées par les 3 systèmes de produits d'unités suivants :

1° $e_1 e_1 = 0 \qquad e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0 \qquad e_2 e_2 = 0$

2° $e_1 e_1 = e_1 \qquad e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0 \qquad e_2 e_2 = 0$

3° $e_1 e_1 = e_2 \qquad e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0 \qquad e_2 e_2 = 0$

Systèmes de nombres à deux unités, admettant une multiplication distributive, associative et commutative avec module.

Soit le module : $e = \varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2$

Prenons pour unités e et un autre nombre complexe g :

$$ee = e \qquad eg = ge = g \qquad gg = \mu e + \nu g$$

Le carré d'un nombre complexe qcq : $a = \alpha e + \beta g$ $(\beta \gtrless 0)$ est : $aa = (\alpha^2 + \mu\beta^2) e + [\beta(2\alpha + \beta\nu)] g$

Posons : $\alpha = -\frac{1}{2}\beta\nu$: $\qquad aa = (\alpha^2 + \mu\beta^2) e$

3 cas : 1° $\frac{\nu^2}{4} + \mu > 0$; posons : $\beta^2\left(\frac{\nu^2}{4} + \mu\right) = 1$.

Prenons pour 2e unité : $\quad a = \pm \dfrac{\frac{1}{2}\nu e - g}{\sqrt{\frac{\nu^2}{4} + \mu}}$

on a les produits d'unités :

$$e.e = e \qquad e.a = a.e = a \qquad a.a = e$$

d'où : $\quad e.e - a.a = 0 \quad$ ou : $(e-a)(e+a) = 0$.

Il y a donc 2 nombres $e-a$, $e+a$, différents de 0, dont le produit est 0. Prenons pour unités définitives : $j_1 = \frac{e+a}{2} \quad j_2 = \frac{e-a}{2}$.

$$j_1 j_1 = j_1 \qquad j_1 j_2 = j_2 j_1 = 0 \qquad j_2 j_2 = j_2$$

Multiplication : $(\alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2)(\beta_1 j_1 + \beta_2 j_2) = (\alpha_1\beta_1) j_1 + (\alpha_2\beta_2) j_2$

module : $j_1 + j_2$.

La division : $\alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2 = x.(\beta_1 j_1 + \beta_2 j_2)$

est impossible, quand $\beta_1 = 0$ et $\alpha_1 \gtrless 0$,

ou quand $\beta_2 = 0$ et $\alpha_2 \gtrless 0$.

L'équation : $x^2 = \alpha_1 j_1 + \alpha_2 j_2$

n'a de racines que si $\alpha_1 \geqq 0$, $\alpha_2 \geqq 0$: alors 4 racines :

$$x = (\pm\sqrt{\alpha_1}) j_1 + (\pm\sqrt{\alpha_2}) j_2$$

2° $\frac{\nu^2}{4} + \mu = 0$: L'équation : $x^2 = 0$

a une infinité de racines non nulles. Si l'on prend l'une d'elles, j, pour 2e unité, on a : $e.e = e$, $e.j = j.e = j$, $j.j = 0$.

Multiplication : $(\alpha e + \beta j)(\alpha' e + \beta' j) = (\alpha\alpha')e + (\alpha\beta' + \beta\alpha') j$.

La division par βj ~~est~~ en général impossible, et l'équation :

$x^2 = \alpha e$ n'a pas de racine quand $\alpha < 0$.

3° $\frac{\nu^2}{4} + \mu < 0$: Prenons β tel que : $\beta^2\left(\frac{\nu^2}{4} + \mu\right) = -1$.

Prenons la racine carrée de $-e$: $i = \pm \dfrac{\frac{1}{2}\nu e - g}{\sqrt{-\frac{1}{4}\nu^2 - \mu}}$

pour 2e unité ; on a les produits :

$e.e = e$, $e.i = i.e = i$, $i.i = -e$.

Multiplication : $(\alpha e + \beta i)(\alpha' e + \beta' i) = (\alpha\alpha' - \beta\beta') e + (\alpha\beta' + \beta\alpha') i$.

La division par un nombre quelconque non nul est toujours possible et univoque.

Le produit de 2 nombres n'est nul que si l'un des deux l'est.

Des 3 systèmes précédents de nombres complexes (hyperbolique, parabolique, elliptique) le dernier seul obéit aux règles du calcul des nombres réels.



Nombres complexes ordinaires. $e = 1$.

$ii = -1$: $x^2+1 = (x-i)(x+i)$ $\left(x^2+1=0\ ,\ x = \pm i.\right)$

Valeur absolue (Weierstrass) ou module (Argand) d'un n. complexe.

Nombres complexes à n unités avec multiplication distributive, ~~associative~~, commutative.

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n \qquad b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$$

$a = b$ quand $\alpha_1 = \beta_1\ ,\ \alpha_2 = \beta_2, \ldots\ \alpha_n = \beta_n$

$$a + b = (\alpha_1+\beta_1)e_1 + (\alpha_2+\beta_2)e_2 + \ldots + (\alpha_n+\beta_n)e_n$$

$$\rho a + \sigma \alpha = (\rho+\sigma)\, a \ ,\qquad \rho(a+b) = \rho a + \rho b$$

$$\rho a . \sigma b = (\rho\sigma)(a.b)$$

Les produits des unités : $e_r e_s$ doivent être des nombres complexes du système. Ils doivent vérifier les lois commutative et associative. — Exemple $e_r e_r = e_r$, $e_r e_s = 0$ $(r \gtrless s)$

$$a.b = \alpha_1\beta_1 e_1 + \alpha_2\beta_2 e_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n e_n \quad (\text{mod } e = e_1 + e_2 + \ldots + e_n)$$

Dans tout système de nombres complexes à plus de 2 unités, et vérifiant les conditions précédentes, il y a des nombres différents de zéro, dont le produit est nul. (Grassmann, Hankel)

C'est pourquoi Gauss a affirmé que les relations entre des objets qui ~~offrent une multi~~plicité de plus de 2 dimensions ne peuvent donner lieu à l'introduction de nouvelles grandeurs dans l'arithmétique générale. D'ailleurs Weierstrass a montré que les grandeurs complexes à n unités ne sont qu'une généralisation insignifiante & superflue des nombres réels et complexes.

Selon Dedekind les nombres complexes sont inutiles, parcequ'ils sont au fond identiques avec les fonctions entières de degré $(n-1)$ d'une racine g d'une équation algébrique de degré n (polynômes en $g, g^2, \ldots g^{n-1}$)

On remplace dans une fonction entière de g de degré $(n-1)$
$1, g, g^2, \dots g^{n-1}$ par $g_0, g_1, g_2, \dots g_{n-1}$.
g_0 est le module de la multiplication ; $g_0, g_1, g_2, \dots g_{n-1}$ sont les unités du système. A chaque nombre complexe correspond une fonction entière de g, du degré $(n-1)$ au plus.

Le système se décompose en systèmes partiels à 1 ou 2 unités, tels que chaque nombre du système général se décompose d'une seule manière en une somme de nombres appartenant chacun à un système partiel différent, qu'on nomme ses composants.

Deux nombres qui appartiennent à deux systèmes partiels différents ont un produit nul.

Le produit de 2 nombres d'un même système partiel appartient à ce système, et il n'est nul que si l'un des facteurs l'est.

Le module g_0 de la multiplication se décompose lui même :

$$g_0 = g_1^0 + g_2^0 + \dots + g_k^0$$

Soit a_r un nombre du système partiel G_r ; on a :

$a_r g_0 = a_r$ or : $a_r g_0 = a_r g_r^0$ Donc $a_r g_r^0 = a_r$

c.à.d. que le nombre g_r^0 est le module de la multiplication dans le système G_r.

Si le système G_r est à 1 unité, chaque nombre de ce système peut s'écrire : αg_r^0

Si le système G_r est à 2 unités, chaque nombre de ce système peut s'écrire : $\alpha g_r^0 + \beta k_r$ où : $k_r . k_r = - g_r$

c.à.d. chaque système partiel est elliptique (comme le syst. ordinaire à 2 unités) — Ainsi l'on peut remplacer les n unités primitives $e_1 e_2 \dots e_n$ par n unités nouvelles réparties en k groupes de 1 ou 2 unités.



Le produit de 2 unités de groupes différents est nul. Dans un groupe de 2 unités, la 1e est le module de la multiplication, et peut être considérée comme 1; la 2e multipliée par elle-même donne −1. En un mot, chaque système partiel à 2 unités est identique au système des nombres complexes ordinaires. Donc tout système de nombres complexes à n unités, dont la multiplication obéit aux 3 lois, équivaut à une combinaison de systèmes répétés de nombres réels et de nombres complexes ordinaires (Weierstrass)
[Rem. Ces systèmes ont la propriété, que l'éq. $x^m = 0$ n'a que la rac. $x = 0$.]

II. Théorie synthétique des nombres complexes.

Les nombres complexes ont été trouvés par la voie analytique — On les a considérés comme des grandeurs impossibles, tant qu'on ne leur eut pas trouvé une signification intuitive. Argand (1806) est le premier qui les ait représentés par des vecteurs, et ait donné aux opérations un sens géométrique. Gauss, qui en 1799 trouvait simplement plus raisonnable de conserver les imaginaires que de les rejeter (Oeuvres, III, 6 note) exposa en 1831 l'interprétation géométrique, à propos de la théorie des restes biquadratiques (II, 171.) Bellavitis appliqua les imaginaires à la géométrie, et inventa la méthode des équipollences (1835.) Mœbius (Abh. der königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, 1852-55.)

Les vecteurs dans le plan euclidien, d'après la grandeur et la position. Egalité (équipollence) de deux vecteurs. Vecteurs opposés ou symétriques: leur somme est nulle.
Addition et soustraction des vecteurs dans le plan. L'addition est associative et commutative; la soustraction est tjrs possible, et univoque. Multiplication d'un vecteur par un nombre réel (coefficient, non facteur) Ce vecteur conserve sa direction.

Représentation systématique des vecteurs du plan

$OM = OP + PM = xe + yi = x + yi$

e, i sont les 2 unités élémentaires, càd les vecteurs perpendiculaires OI, OJ, de longueur unité. $x = \frac{OP}{OE}$, $y = \frac{OQ}{OJ}$.

Coordonnées polaires ρ, θ ; $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ valeur absolue.

Deux vecteurs symétriques $(\theta, -\theta)$ sont imaginaires conjugués. Leur somme est réelle.

Multiplication des vecteurs :

Le produit de 2 vecteurs est une 4e proportionnelle des 2 facteurs et du vecteur $OE = e = 1$ (module de la multiplication). On l'obtient en construisant deux triangles semblables : $AP = AB.CD$, càd :

$AP : AB = CD : OE$ $\qquad CE_1 = OE$ en gr. et dir.

Le module du produit est le produit des modules, son argument la somme des arguments des facteurs. Le produit de 2 vecteurs conjugués est réel. — Loi associative et commutative.

Comme OE, OI sont perpendiculaires, $ei = i$; $i.i = -e$.

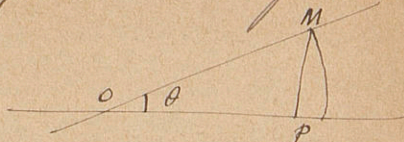
D'où la formule : $(a+bi)(a'+b'i) = aa' - bb' + (ab' + ba')i$.

$(x+yi)(x-yi) = x^2 + y^2$ Th. de Pythagore ?

Vecteurs associés (Gauss) : $x+yi$, $y-xi$, $-x-yi$, $-y+xi$, obtenus par rotations de 90° (multiplication par i.) — Multiplier un vecteur OM par un vecteur OM', c'est composer avec OM et ses associés un vecteur de même que OM' est composé avec les 4 vecteurs-unités $e, i, -e, -i$.

Division Le quotient de deux vecteurs parallèles est réel ; de deux vecteurs perpendiculaires, est purement imaginaire.

Applications géométriques. Arithmétique de position dans le plan



Fonctions trigonométriques :

$$\cos\theta = \frac{OP}{OM} \qquad \sin\theta = \frac{MP}{OM}$$

$$OM = \rho \; ; \qquad OP = x = \rho\cos\theta \qquad MP = y = \rho\sin\theta$$

$$OM = x + yi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

forme trigonométrique d'un nombre complexe

Les théorèmes d'addition des sinus et cosinus, qui sont les fondements de la trigonométrie, sont contenus dans la règle de multiplication des vecteurs :

$$\rho\rho'\left[\cos(\theta\pm\theta') + i\sin(\theta\pm\theta')\right] = \rho\rho'\left[\cos\theta\cos\theta' \mp \sin\theta\sin\theta' + i(\sin\theta\cos\theta' \pm \cos\theta\sin\theta')\right]$$

Fonctions cyclométriques :

$$\text{arc}\cos x \qquad \text{arc}\sin x \qquad \text{arc}\,\text{tg}\, x$$

Formule de Moivre, déduite de la règle de multiplication :

$$\left[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^m = \rho^m(\cos m\theta + i\sin m\theta)$$

$$\frac{1}{\rho^m(\cos\theta + i\sin\theta)^m} = \frac{1}{\rho^m}(\cos m\theta - i\sin m\theta)$$

Développements de $\cos m\theta$, $\sin m\theta$ suivant les puissances de $\cos\theta$, $\sin\theta$. — de $\cos^m\theta$, $\sin^m\theta$ en fonction des sinus et cosinus des multiples de l'arc θ : en posant : $\cos\theta + i\sin\theta = t$, $\cos\theta - i\sin\theta = t^{1}$.

Les principaux théorèmes de la trigonométrie résultent de la formule

$$AB + BC + CA = 0 \qquad \text{(addition des vecteurs.)}$$

où les points A, B, C ne sont pas nécessairement en ligne droite.

Soient a, b, c les longueurs des 3 côtés du triangle, $\widehat{ax}$, $\widehat{bx}$, $\widehat{cx}$ les angles qu'ils font avec Ox (angles polaires ~~ou a~~ des directions BC, CA, AB) ; on a :

$$BC = a(\cos\widehat{ax} + i\sin\widehat{ax})$$
$$CA = b(\cos\widehat{bx} + i\sin\widehat{bx})$$
$$AB = c(\cos\widehat{cx} + i\sin\widehat{cx})$$

$a\cos\widehat{ax} + b\cos\widehat{bx} + c\cos\widehat{cx} = 0$

$a\sin\widehat{ax} + b\sin\widehat{bx} + c\sin\widehat{cx} = 0$ $\qquad \widehat{ax} - \widehat{bx} = \widehat{ab} = \hat{C}$.

~~En multipliant~~ éliminant $\underset{-}{a}$ (ab) entre ces 2 relations on trouve :

$b\sin\widehat{ba} + c\sin\widehat{ca} = 0$ $\qquad b\sin C - c\sin B = 0$

$a\sin\widehat{ab} + c\sin\widehat{cb} = 0$ $\qquad a\sin C - c\sin A = 0$

c.à.d. : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ relation des sinus.

On obtient aussi : $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc.\cos\widehat{bc}$

$2S$ (surface du tr. ABC) $= bc\sin\widehat{bc}$.

L'équation fondamentale : $AB + BC + CA = 0$
est l'extension au plan de la formule de Mœbius sur la droite, en vertu du théorème des projections.

— Rapports simples et doubles (anharmoniques) des points du plan

De la formule : $\dfrac{\rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')}{\rho(\cos\theta + i\sin\theta)} = \dfrac{\rho'}{\rho}(\cos(\theta'-\theta) + i\sin(\theta'-\theta))$

on déduit, en prenant
CA, CB pour directions positives des 2 vecteurs AC, BC :

$\dfrac{AC}{CB} = -\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}(\cos B\hat{C}A + i\sin B\hat{C}A)$ $\quad \overline{AC}, \overline{CB}$ longueurs absolues des vecteurs.

C'est ce qu'on appelle le rapport des 3 points ABC du plan

Si A, B, C sont en ligne droite, $AC : CB = \overline{AC} : \overline{CB}$ (réel.)

Le quotient des 2 rapports (AB, C) et (AB, D) est le rapport double (anharmonique) des 4 points ABCD du plan.

Si l'on pose : $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OD = d$,

$\dfrac{AC}{CB} : \dfrac{AD}{DB} = \dfrac{a-c}{c-b} : \dfrac{a-d}{d-b}$

Ce rapport n'est réel que si les 4 points sont sur une même droite ou sur un même cercle.



— Racines de nombres complexes. L'équation : $x^m = a$
où $\underline{a}$ est un nombre complexe non nul, m un nombre entier, a $\underline{m}$ solutions distinctes. Si : $a = A(\cos\alpha + i\sin\alpha)$
et si l'on pose : $x = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$
pour que x soit racine de l'éq. il faut et il suffit que :
$\rho^m = A$ $m\theta = \alpha + 2k\pi$.
Si a est réel : $a = A$, $\rho = \sqrt[m]{A}$, $\theta = \dfrac{2k\pi}{m}$
En général : $\sqrt[m]{a} = \left|\sqrt[m]{A}\right| \times \left(\cos\dfrac{\alpha+2k\pi}{m} + i\sin\dfrac{\alpha+2k\pi}{m}\right)$
Valeur principale pour $k=0$: $\left|\sqrt[m]{A}\right| \times \left(\cos\dfrac{\alpha}{m} + i\sin\dfrac{\alpha}{m}\right)$
(réelle, si a est réel)
Racines $\underline{m}^{es}$ de l'unité : $\cos\dfrac{2k\pi}{m} + i\sin\dfrac{2k\pi}{m}$

Puissances de nombres complexes à exposants réels.
On définit ainsi un ensemble de fonctions uniformes et continues de la variable ξ qui parcourt toutes les valeurs finies réelles, et qui, quels que soient les nombres réels ξ, η satisfont l'équation fonctionnelle : $f(\xi).f(\eta) = f(\xi+\eta)$
et en outre, la condition : ~~f(a) =~~ $f(1) = a$ (a complexe non nul)
$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{A^m}\left[\cos\frac{m}{n}(\alpha+2k\pi) + i\sin\frac{m}{n}(\alpha+2k\pi)\right]$$
En général, quel que soit le nombre réel ξ :
$$a^\xi = \left|A^\xi\right| \times \left[\cos\xi(\alpha+2k\pi) + i\sin\xi(\alpha+2k\pi)\right]$$
Selon que ξ est un nombre entier, fractionnaire ou irrationnel, la puissance a^ξ a une, plusieurs ou une infinité de valeurs distinctes.

0^ξ est 0 ou ∞, suivant que ξ est positif ou négatif
0^0 n'a pas de sens.

III. Variables et fonctions complexes.

– Le nombre improprement dit : ∞.

Si une fonction uniforme $y = f(x)$ n'est pas définie pour $x = a$, mais si sa réciproque $\frac{1}{f(x)}$ prend la valeur 0, on dit que $f(x)$ est infinie pour $x = a$: $f(a) = \infty$.

En particulier, cela est vrai pour la fonction : $x' = \frac{1}{x}$; elle est définie pour toutes les valeurs finies de x, car pour $x = 0$ $x' = \infty$. Le nombre impropre ∞ s'ajoute donc à l'ensemble des nombres complexes comme à l'ensemble des nombres réels.

La fonction $y = f(x)$ a pour $x = \infty$ la valeur finie b ou la valeur ∞, suivant que pour $x' = 0$ la fonction

$$g(x') = f\left(\frac{1}{x'}\right) \quad \text{a la valeur } b,$$

ou que la fonction : $g_1(x') = 1 : f\left(\frac{1}{x'}\right)$ a la valeur 0.

Le point $x = \infty$ est un point ordinaire pour une fonction uniforme analytique, et cette fonction est holomorphe en ce point, si $f(\infty)$ est un nombre fini $\frac{b}{\neq}$, et s'il existe un nombre pos. δ tel que pour ~~pour~~ toutes les valeurs : $|x| > \delta$,

$f(x)$ soit développable en une série finie ou infinie de puissances positives entières de $\frac{1}{x}$, qui pour $x = \infty$ se réduise à $\underline{b}$.

Le point $x = \infty$ est un pôle de $f(x)$, si cette série contient en outre des puissances positives de $\underline{x}$ en nombre fini.

Le plan de la géométrie euclidienne se trouve complété par le <u>point à l'infini</u>. Il correspond au rapport -1 de 2 p. quelconques du plan. Soit U ce nouveau point (impropre = uneigentlich) :

$(AB, U) = -1$, $\quad (AU, C) = 0$, $\quad 1 : (U, B, C) = 0$.



Cette extension des points du plan diffère de celle de la géométrie moderne qui à chaque faisceau de droites parallèles fait correspondre un point à l'infini, de sorte que tous ces points forment la droite de l'infini. Celle-ci a pour fin de faire correspondre à chaque élément du plan un élément distinct, à chaque rayon un point, à chaque ~~plan~~ point une droite. — Le procédé de la théorie des fonctions coïncide au contraire avec la projection stéréographique de la sphère sur le plan, qui fait correspondre les 2 surfaces point par point: au pôle de projection correspond alors l'unique point à l'infini.

Au lieu de donner à une variable x la valeur ∞, il est plus commode de la remplacer par ~~2 var~~ ~~le quotient~~ $\frac{x_1}{x_2}$ et de faire $\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = 0. \end{cases}$

Représentation conforme ou isogonale d'un plan par une f. analytique.
Cas particuliers: ~~Il en résulte~~ la similitude, par l'éq. $x' = a + bx$
et l'affinité circulaire, par l'éq.: $x' = \frac{a+bx}{c+dx}$
(à un cercle correspond un cercle
parce que le rapport anharmonique de 4 points se ~~trouve~~ conservé)
Dans toutes ces transformations, les angles se conservent.

IV. Fonctions rationnelles entières.

Proposition fondamentale de l'algèbre (d'après Argand.)

— Quelles que soient les valeurs des coefficients de la fonction entière du n^e degré en x : $F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ $|a_0| > 0$ il y a au moins un nombre déterminé, réel ou complexe, c, qui vérifie l'équation : $F(x) = 0$.

c s'appelle une racine de cette équation.

Dém. Posons : $x = \xi + \eta i$, $F(\xi + \eta i) = \Phi(\xi, \eta) + i\Psi(\xi, \eta)$

$$|F(\xi + \eta i)| = \sqrt{\Phi(\xi\eta)^2 + \Psi(\xi\eta)^2} = P(\xi, \eta)$$

$P(\xi, \eta)$ est une fonction continue de ξ, η pour toutes les valeurs finies et déterminées de ξ, η. Comme $F(0) = a_n$, $P(\xi, \eta)$ a une limite inférieure k : (valeur abs.)

$$0 \leq k \leq |a_n|$$

De plus : $\lim_{x=\infty} F(x) = \infty$, car :

$$F(x) = x^n \left[a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right]$$ et $\lim \frac{1}{x} = 0$ pour $\lim x = \infty$.

Donc à tout Γ correspond un ρ tel que : $P(\xi, \eta) > \Gamma$ pour $|x| > \rho$.

1° Il y a un système de valeurs (finies) $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$, pour lequel $P(\xi, \eta)$ prend la valeur k (son minimum). En effet prenons $\Gamma > k$ et traçons le cercle de rayon ρ et de centre O, $P(\xi, \eta)$ devra avoir sa limite inférieure k à l'intérieur de ce cercle, et comme elle est continue, elle atteindra cette limite en un point de ce cercle.

2° La limite inférieure k de $P(\xi, \eta)$ est nulle : $P(\alpha, \beta) = 0$, et par conséquent : $F(\alpha + \beta i) = 0$.

En effet, si k n'est pas nul, on peut rendre $P(\xi, \eta) < k$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Posons : $\alpha + \beta i = c$, $|F(c)| = k > 0$.

Soit $F^m(c)$ la première dérivée qui ne soit pas nulle : $1 \leq m \leq n$, car : $F^n(c) = n!\, a_0 \gtrless 0$ Développons $F(c+h)$:



$$F(c+h) = F(c) + \frac{F^{m}(c)}{m!} h^m + \frac{F^{m+1}(c)}{(m+1)!} h^{m+1} + \dots + a_0 h^n$$

$$\frac{F(c+h)}{F(c)} = 1 + C_m h^m + C_{m+1} h^{m+1} + \dots + C_n h^n$$

où les coefficients C sont : $C_r = \frac{F^r(c)}{r!\,F(c)} = \rho_r(\cos\gamma_r + i \sin\gamma_r)$

Posons : $h = H(\cos\theta + i \sin\theta)$

$$\frac{F(c+h)}{F(c)} = 1 + \rho_m H^m\left[\cos(\gamma_m + m\theta) + i\sin(\gamma_m + m\theta)\right] + C_{m+1} h^{m+1} + \dots + C_n h^n$$

Déterminons θ par la condition : $\gamma_m + m\theta = \pi$

$$\frac{F(c+h)}{F(c)} = \left(1 - \rho_m H^m\right) + C_{m+1} h^{m+1} + \dots + C_n h^n$$

Prenons H tel que $\rho_m H^m < 1$, nous aurons ;

$$\left|\frac{F(c+h)}{F(c)}\right| \leqq \left(1 - \rho_m H^m\right) + \rho_{m+1} H^{m+1} + \dots + \rho_n H^n$$

$$\left|\frac{F(c+h)}{F(c)}\right| \leqq 1 - \rho_m H^m\left[1 - \frac{\rho_{m+1}}{\rho_m} H - \dots - \frac{\rho_n}{\rho_m} H^{n-m}\right]$$

On peut prendre H suffisamment petit pour que :

$$\frac{\rho_{m+1}}{\rho_m} H + \dots + \frac{\rho_n}{\rho_m} H^{n-m} < 1$$

Alors on aura : $|F(c+h)| < |F(c)|$ c.à.d. $|F(c+h)| < k$.

Corollaires. Toute équation algébrique du n^e degré a n racines.
Toute fonction entière du n^e degré est décomposable en n facteurs linéaires. — Relations entre les coefficients.

Si une équation à coefficients réels admet une racine imaginaire elle admet la quantité conjuguée comme racine du même ordre de multiplicité.

Toute fonction entière à coefficients réels peut se décomposer en facteurs réels du 1er ou du 2e degré (Gauss)

VIII. Fractions continues.

La fraction continue indéfinie $h_0 + \cfrac{1}{h_1 + \cfrac{1}{h_2 + \cfrac{1}{h_3 + \cdots}}}$

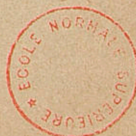
converge ou oscille entre des limites finies, suivant que la série infinie : $h_1 + h_2 + h_3 + \cdots$

diverge ou converge ; ou bien : suivant que, des 2 séries :

$h_1 + h_3 + h_5 + \cdots \qquad h_2 + h_4 + h_6 + \cdots$

l'une diverge, ou aucune.

Toute fraction continue régulière (ou simple) est convergente, et a une limite irrationnelle.



56

Géométrie de Clebsch.

Clebsch.



Clebsch : Leçons de géométrie — Gauthier-Villars 1879.
Tome I. Réd. par Lindemann ; trad. par Benoist.

Ch. I. Coordonnées lignes :

§ III. Nous entendons par coordonnées u, v d'une droite les valeurs inverses, prises négativement, des segments qu'elle intercepte sur les axes des coordonnées.

Ainsi la droite : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$

a pour coordonnées : $u = -\frac{1}{a}$, $v = -\frac{1}{b}$.

et pour éq. en coord lignes : $ux + vy + 1 = 0$.

Principe de dualité.

Ce principe signifie que certains théorèmes qui ont lieu pour les figures ponctuelles peuvent être transportés aux figures dont la ligne est l'élément (en coord. tangentielles). Cette réciprocité s'applique à la jonction de deux points (par une droite) et à l'intersection de deux droites, et s'étend à toutes les constructions qui peuvent résulter d'opérations de cette nature. Elle n'a plus lieu quand d'autres moyens auxiliaires doivent être employés, par exemple lorsqu'une détermination de mesure entre dans le problème ; mais le principe ne doit pas être considéré comme subissant par là une restriction, car nous apprendrons un moyen ~~de~~ de ramener très simplement les relations métriques aux autres.

L'équation : $ux + vy + 1 = 0$

exprime la réunion de situation d'une droite et d'un point : c'est l'éq. d'un point ou l'éq. d'une droite suivant que l'on y considère u, v ou x, y comme variables. On voit que les coordonnées du point et de la droite y entrent symétriquement.



Parallélisme des coord ponctuelles et tangentielles des courbes
Le degré ~~le plus élevé~~ de l'éq. en coord ponctuelles est l'ordre de la courbe, le degré de son éq. en coord. tangentielles en est la classe
- Toute droite représente une série de points.
Tout point représente un faisceau de rayons.
Coordonnées d'un point de la série déterminée par 2 p. fixes

$$x = \frac{x_0 + \lambda x_1}{1+\lambda} \qquad y = \frac{y_0 + \lambda y_1}{1+\lambda}$$

Coordonnées d'un rayon du faisceau déterminé par 2 dr fixes :

$$u = \frac{u_0 + \lambda u_1}{1+\lambda} \qquad v = \frac{v_0 + \lambda v_1}{1+\lambda}$$

On a tous les points de la série et tous les rayons du faisceau en donnant au paramètre λ toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$.

§IV. La géométrie synthétique moderne repose sur l'étude des séries de points et des faisceaux de rayons.
Soient 2 points : $P = 0$ $\qquad Q = 0$
et 2 autres points pris sur leur ligne de jonction :

$$P + \mu Q = 0 \qquad P + \mu' Q = 0$$

les rapports de leurs distances aux deux points de base sont :

$$\frac{r}{s} = \mu C \qquad \frac{r'}{s'} = \mu' C$$

d'où : $$\frac{\mu}{\mu'} = \frac{r}{s} : \frac{r'}{s'}$$

C'est le rapport anharmonique des quatre points choisis
Supposons maintenant 4 points qcques d'une droite :

$$P + \mu_1 Q = 0 \qquad P + \mu_2 Q = 0$$
$$P + \mu_3 Q = 0 \qquad P + \mu_4 Q = 0$$

Leur rapport anharmonique sera : $\alpha = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} : \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_2 - \mu_4}$

De même : rapport anharmonique de 4 rayons d'un faisceau.
Un rapport anharmonique est susceptible de 6 valeurs suivant l'ordre dans lequel on accouple les 4 points :

$$\alpha, \frac{1}{\alpha}, 1-\alpha, \frac{1}{1-\alpha}, \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Trois dispositions exceptionnelles :
1° Le rapport α prend une des 6 valeurs :

$$1, 1, 0, \infty, 0, \infty$$

Alors 2 des 4 points coïncident.
2° Le rapport α prend une des 6 valeurs :

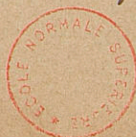
$$-1, -1, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}.$$

Alors les 4 points sont en situation harmonique.
Pour $\alpha = -1$, les 2 ~~couples~~ points de chaque couple sont dits conjugués harmoniques par rapport aux 2 autres.
La division par moitié d'un segment est un cas particulier de la division harmonique (quand l'un des points est à l'infini)
3° Le rapport α est déterminé par l'équation :

$$\alpha^2 - \alpha + 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

d'où : $\alpha^3 = -1$

Les 6 valeurs se réduisent à 2 groupes de 3 valeurs égales respect. aux racines cubiques imaginaires conjuguées de ~~l'unité~~ -1.
Situation équianharmonique (Cremona) Un des 4 points est nécessairement imaginaire. Etant donnés 3 points, il existe 2 points imaginaires équianharmoniques à ces 3 p. (double signe)



Nous sommes ainsi amenés pour la première fois à considérer même les valeurs imaginaires des variables et des coefficients; et, en fait, l'on s'est vu forcé dans les temps modernes de les introduire pleinement, aussi bien que les valeurs réelles, dans les considérations géométriques. Bien qu'elles échappent à l'intuition immédiate, on peut cependant effectuer analytiquement sur elles toutes les opérations, comme si l'on avait affaire à des points ou à des droites réelles, et même par la réunion d'éléments imaginaires différents peuvent être engendrés des éléments réels dont le sens nous resterait caché sans la considération des premiers.

— Considérons simultanément deux groupes d'éléments donnés par les équations: $P+\mu Q=0$, $P'+\mu Q'=0$

représentant des séries de points ou des faisceaux de rayons. Un des éléments de chaque groupe est déterminé par une même valeur de μ. Appelons ces deux éléments él. correspondants: les deux figures auront alors entre elles une relation à détermination unique; à chaque point ou rayon de l'une correspond un point ou rayon de l'autre, et inversement. On dit alors que les deux figures sont en relation projective.

Si deux figures sont projectives, quatre éléments de l'une et les quatre éléments correspondants de l'autre ont le même rapport anharmonique.

Pour établir la projectivité entre deux figures (séries ou faisceaux) il suffit de faire correspondre 3 éléments qcques de l'une à 3 éléments de l'autre.

Deux figures projectives de même base (même droite, ou même point) sont identiques lorsque 3 couples d'éléments correspondants coïncident.

Les séries et faisceaux projectifs peuvent toujours être mis en position perspective.

Ces considérations nous ont conduits de la notion du rapport anharmonique aux principes de la géométrie synthétique moderne, car celle-ci se fonde essentiellement (surtout depuis Steiner) sur la conception de la droite comme série de points, du point comme faisceau de rayons, et sur la relation projective de ces figures élémentaires, relation obtenue d'abord par l'intermédiaire de la perspective. Mais par suite de l'introduction des coordonnées-lignes et du principe de dualité, ces idées entrent aussi avec une clarté complète dans les recherches analytiques, et la différence entre la géométrie analytique et la géométrie synthétique ne doit plus être considérée comme substantielle : les deux branches de la science opèrent exactement avec les mêmes notions, et la première donne une forme d'expression précise à la seconde.

§ V. — Définition des courbes du second degré (ordre ou classe, c'est la même chose) par les intersections des rayons correspondants de deux faisceaux projectifs non en perspective, ou par les jonctions des points correspondants de deux séries projectives non en perspective.

Une courbe d'ordre n est coupée par une droite en n points (réels ou imaginaires).

A une courbe de classe n on peut mener d'un point n tangentes (réelles ou imaginaires).

§ VI. Division harmonique dans les quadrilatères complets (système de 4 droites) et dans les quadrangles complets (système de 4 points).



§ VII. Les formules de transformation des coordonnées-lignes ont une autre forme que celles des coordonnées-points. — Il n'y a donc pas correspondance entre ces formules et le principe de dualité, qui exige une transformation symétrique pour les coordonnées-points et pour les coordonnées-lignes, et la raison en est que le système cartésien est un cas particulier d'un système plus général, particularisé sans égard au principe de dualité.

Les formules de transformation des coordonnées obliques ont le même type : on ne gagne donc rien, au point de vue de la symétrie, à les employer.

Les <u>coordonnées triangulaires</u> d'un point sont trois nombres ayant entre eux les mêmes rapports que les distances du point aux côtés d'un triangle, chaque distance étant multipliée par une constante arbitraire, mais fixe.

Comme il suffit de 2 données pour fixer un point, les valeurs absolues des 3 coordonnées sont absolument arbitraires ; leurs rapports seuls déterminent le point, quand on connaît les 3 droites de base. Ce système de coordonnées a l'avantage d'employer symétriquement les 3 droites de base (côtés du triangle de référence)

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 0$$

De même :

Les coordonnées-lignes homogènes d'une droite sont trois nombres ayant entre eux le même rapport que les distances de cette droite aux sommets du triangle de référence, chaque distance étant multipliée par une constante arbitraire, mais fixe.

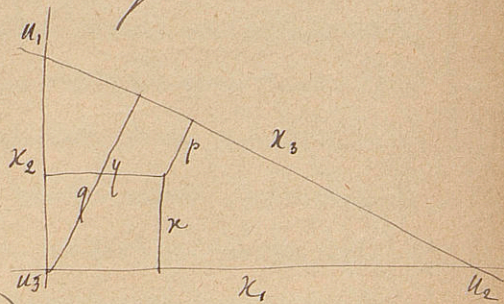
On choisit les constantes arbitraires de manière que la réunion du point et de la droite soit exprimée par l'équation :

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

(Les 3 sommets du triangle de référence sont : $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$.)

<u>Les coordonnées homogènes</u> satisfont au principe de dualité : pour le point comme pour la droite, les coordonnées rectangulaires sont égales à des expressions linéaires à dénominateur commun des coordonnées triangulaires.

Le système rectangulaire est un cas particulier du système triangulaire. En effet, prenons un triangle de référence rectangulaire :



on peut poser :

$x = x_1, \quad y = x_2, \quad x_3 = \frac{p}{q}.$

($\frac{1}{q}$ étant un coefficient constant.)

Si le 3e côté s'éloigne à l'infini (en restant parallèle à lui-même), $\frac{p}{q}$ tend vers 1.

On passe donc des coordonnées triangulaires aux coord rectangulaires en faisant : $x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = 1.$

De même on peut faire : $u_3 = 1$, puisque les coords $u_1 u_2 u_3$ ne figurent que par leurs rapports, et l'on aura :

$$u_1 = -\frac{1}{a}, \quad u_2 = -\frac{1}{b}, \quad u_3 = 1.$$

L'équation homogène : $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$

devient l'éq. ordinaire : $ux + vy + 1 = 0.$

Le degré des équations reste le même en coord homogènes qu'en coord. cartésiennes.

Parmi les équations du 1er degré, il faut remarquer la suivante :

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$$

qui forme le dénominateur commun de x et y dans les formules de transformation des coord homogènes en coord cartésiennes.

Pour tous les points de cette droite, et pour ceux là seulement, on a : $x = \infty, \quad y = \infty.$



Elle renferme donc tous les points du plan qui sont à distance infinie. Comme l'ensemble de ces points est représenté par une équation linéaire, nous parlerons d'une droite de l'infini. (Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures, p. 49, 53) Par là nous exprimons le fait analytique dont nous parlons, mais nullement une conception métaphysique.

L'introduction de cette dénomination nous permet de démontrer et d'énoncer plus simplement un grand nombre de théorèmes, en opérant sur la droite de l'infini comme sur une droite qu'on aurait réellement sous les yeux. Par ex: une droite n'a qu'un seul point à l'infini, parce que deux droites ne se coupent qu'en un point. En général, une courbe du n^e ordre a n points à l'infini (réels ou imaginaires).

L'équation homogène: $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$

est la forme la plus générale tant de l'équation d'un point que de l'équation d'une droite.

Ch. II. §1. Les coniques; théorie des polaires.

$v_1 v_2 v_3$. coord. lignes de la polaire; $y_1 y_2 y_3$ coord. homog. du pôle.

$$\begin{cases} \sigma v_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} y_3 \\ \sigma v_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} y_3 \\ \sigma v_3 = a_{31} y_1 + a_{32} y_2 + a_{33} y_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho y_1 = A_{11} v_1 + A_{21} v_2 + A_{31} v_3 \\ \rho y_2 = A_{12} v_1 + A_{22} v_2 + A_{32} v_3 \\ \rho y_3 = A_{13} v_1 + A_{23} v_2 + A_{33} v_3 \end{cases}$$

les a désignent les coefficients de l'éq. de la conique en coord. homog.; les A, les mineurs correspondants ~~coefficients de l'éq. en coord. lignes~~ (du déterminant de la conique formé par les a)

$$\sigma (v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3) = a_{11} y_1^2 + a_{22} y_2^2 + a_{33} y_3^2 + 2a_{12} y_1 y_2 + 2a_{13} y_1 y_3 + 2a_{23} y_2 y_3$$

ce qui prouve que la polaire de tout point de la conique passe par ce point (et est tangente à la courbe) et récipr.t tout point situé sur sa propre polaire appartient à la conique. — En opérant de même sur le 2e groupe d'éq.:

$$\rho (v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3) = A_{11} v_1^2 + A_{22} v_2^2 + A_{33} v_3^2 + 2A_{12} v_1 v_2 + 2A_{13} v_1 v_3 + 2A_{23} v_2 v_3$$

ce qui donne le 1er membre de l'éq. de la conique en coord. tangentielles.

v. p. 14.

Ch. II. § II. Les coniques et la droite de l'infini.

L'ellipse est une conique coupée par la droite de l'infini en deux points imaginaires ;

L'hyperbole est une conique coupée par la droite de l'infini en deux points réels ;

La parabole est une conique tangente à la droite de l'infini.

Le pôle de la droite de l'infini (centre de la conique) divise par le milieu toutes les cordes qui passent par ce point.

D'où : courbes à centre et courbes dépourvues de centre.

Triangle polaire. On prend ensuite pour côté du triangle polaire la droite de l'infini, et on particularise ainsi les propriétés du triangle polaire. Les 2 autres côtés sont diamètres conjugués.

Les asymptotes d'une conique sont les tangentes menées par ses deux points d'intersection avec la droite de l'infini

Toute asymptote est un diamètre conjugué à lui-même

Le centre d'une parabole est à l'infini

§ III. Coniques évanouissantes (se réduisant à un couple de droites) ($\Delta = 0$)

Dans le cas de l'hyperbole, on a un couple de droites réel.

——— ellipse, ——— imaginaire.

——— parabole, on a deux droites parallèles, que la droite de l'infini coupe en un seul point (ou deux points coïncidants.)

Si le déterminant d'une conique et tous ses mineurs sont nuls elle se réduit à une droite double

§ V. Involution : Système de couples de points sur une ligne droite tel que chaque couple est situé harmoniquement par rapport à deux points déterminés, qu'on nomme points doubles de l'involution

De même : involution dans un faisceau de rayons. [Invariants.]



§ VII. Le cercle.

Tous les cercles du plan ont en commun ~~avec~~ sur la droite de l'infini deux points imaginaires qui restent absolument fixes dans tout mouvement (rotation ou glissement) du plan sur lui-même.

En vertu de ce théorème fondamental de la théorie du cercle, on parvient à considérer tous les théorèmes qui concernent des angles comme des cas particuliers de relations plus générales fondées sur le rapport anharmonique (qu'on peut définir sans faire appel à la notion de distance.) [cf. Von Staudt, Geometrie der Lage.]

Distinction des propriétés métriques et des propriétés projectives des figures géométriques: ces dernières caractérisées par le fait qu'il n'y est pas question d'angles ni de distances, et qu'elles sont fondées principalement sur la considération du rapport anharmonique.

Les points circulaires imaginaires du plan sont les intersections de la droite de l'infini avec la conique évanouissante: $x^2+y^2=0$.

Leur produit en coordonnées-lignes est: $u^2+v^2=0$.

Les asymptotes de tous les cercles sont parallèles. Elles forment avec toutes les autres directions le même angle (infiniment grand)

$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{-1}$. $\qquad \operatorname{arctg} i=\int_0^i \frac{dx}{1+x^2}=\infty$.

Ainsi, tandis que les points situés à une distance infinie d'un point qcque appartiennent à la droite de l'infini, les droites qui font avec une direction qcque un angle infiniment grand (droites infiniment éloignées) enveloppent un couple de points imaginaires à l'infini (les points circulaires).

Cette manière d'être différente des points à distance infinie et des droites à distance infinie est au surplus la cause de la non-permanence du principe de dualité dans les relations métriques.

– Un cercle est complètement déterminé par 3 points du plan. En effet il est assujetti à passer par les 2 points circulaires.

Deux cercles ne peuvent se couper qu'en 2 p. (puisqu'ils se coupent aux 2 points circulaires à l'infini)

Deux droites perpendiculaires forment un faisceau harmonique avec les droites menées de leur point d'intersection aux points circulaires imaginaires.

Ces théorèmes montrent quelle est la liaison intime ~~entre~~ des deux points circulaires avec toutes les relations d'angles. Le dernier, notamment, ramène le tracé des perpendiculaires au problème purement projectif de la division harmonique. Mais cette connexion va encore plus loin : la théorie du cercle se confond avec celle des coniques qui ont 2 points communs. Or l'étude de ces dernières n'exige que des considérations purement projectives, et par suite, la Géométrie métrique ordinaire, en tant qu'elle repose sur la théorie du cercle, apparaît comme une simple application de la Géométrie projective, c.à.d. des relations de situation (Chasles)

— L'angle de deux droites est égal au logarithme multiplié par $\frac{i}{2}$ du rapport anharmonique que ces droites forment avec les lignes allant de leur point d'intersection aux points circulaires imaginaires.

Au moyen de ce théorème, toutes les relations métriques résultent ~~des théor~~ comme cas particulier des théorèmes projectifs relatifs aux relations des figures avec deux points qcques du plan : il suffit de supposer que ces 2 points sont les points circulaires et que la droite qui les joint est la droite de l'infini.

— Les cercles concentriques sont définis par la propriété d'avoir leurs asymptotes communes.

Deux diamètres conjugués d'un cercle sont perpendiculaires entre eux — et comme toute asymptote équivaut à un couple de diamètres conjugués : Toute asymptote du cercle est perpendiculaire à elle-même (toute droite infiniment éloignée)



Jusqu'ici, la notion d'angle est seule remplacée par la notion purement projective de rapport anharmonique: le segment doit aussi pouvoir ~~être~~ se définir de la même manière, si l'on veut transformer tous les théorèmes métriques en théorèmes projectifs. — Différence: pour l'angle on a une unité naturelle: tandis que pour la mesure des segments, le choix de l'unité est arbitraire.

La distance de 2 points A et B (prise dans un sens convenable) est égale au rapport anharmonique que forment avec ces points le point à distance infinie et le point éloigné de B d'une distance égale à l'unité.

En vertu de ces définitions, on peut concevoir la Géométrie métrique comme la théorie des relations des figures planes avec une conique qui se réduit à un couple de points.

De même, toutes les relations projectives des figures planes avec une conique générale peuvent recevoir la forme métrique .... On introduira les tangentes de la conique fondamentale comme des droites infiniment éloignées (c.à.d. passant par les points circulaires), les points de la conique comme des points à distance infinie; on appellera angle de deux droites ~~le~~ le logarithme (multiplié par une constante) du rapport anharmonique que forment les 2 droites avec les tangentes menées à la conique fondamentale par leur point de rencontre.

Or si l'on fait usage d'une conique générale, le principe de dualité est complètement vrai, même pour les relations métriques: on a donc aussi, pour la mesure des segments, une unité donnée d'une manière fixe, et l'on définira la distance de deux points par le logarithme (multiplié par une constante) du rapport anharmonique que forment avec eux les deux points où la ligne qui les joint rencontre la conique fondamentale. (Cf. Klein, Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, ap. Mathematische Annalen, tt. IV, VI, VII.)

La relation de la géométrie métrique à la géométrie projective qui vient d'être énoncée dans les théorèmes cités, présente une importance particulière au point de vue de l'étude systématique des problèmes géométriques. Trop souvent, la solution de ceux-ci, lorsqu'on en fait par usage des éléments imaginaires ou à distance infinie, repose sur des artifices dont le succès apprend seul l'opportunité. Au contraire, à l'aide des vues que nous avons exposées, on parvient à revêtir de suite les problèmes métriques d'une forme plus générale et à leur appliquer alors les méthodes directes et sans restriction de la géométrie projective. D'un autre côté, nous pouvons de chaque théorème métrique connu déduire un théorème plus général, en remplaçant simplement les points circulaires par deux points quelconques du plan.

Une ligne droite forme avec la droite de l'infini un cercle de rayon infiniment grand.

Deux lignes imaginaires conjuguées, par exemple $\begin{cases} x+iy=0 \\ x-iy=0 \end{cases}$ dont chacune passe par l'un des points circulaires forment un cercle de rayon nul : $x^2+y^2=0$.

Axes radicaux. Problème d'Apollonius.

§ VIII. Foyers des coniques.

De chacun des points circulaires partent ~~quatre~~ deux tangentes (imaginaires) à une conique donnée ; les quatre tangentes se coupent en 4 points qui sont les foyers (réels ou imaginaires) de la conique. Les directrices d'une conique sont les polaires de ses foyers réels.

Coniques homofocales.



Ch. III. § I. — Sous le nom de théorie des formes algébriques nous entendons la théorie des fonctions homogènes d'un nombre qcque de variables, considérées spécialement au point de vue de ce qu'elles deviennent en présence d'une transformation linéaire quelconque des variables (Hesse, Cayley, Sylvester, Aronhold.)

L'idée fondamentale de la théorie actuelle des formes peut s'énoncer ainsi qu'il suit : si l'on introduit dans une forme algébrique donnée, au lieu des n variables dont elle dépend, n nouvelles variables liées par n équations linéaires homogènes aux variables originaires, la forme donnée se change en une autre qui a certaines propriétés communes avec la première. L'étude des propriétés de cette espèce, qui ne sont pas troublées par une substitution linéaire, doit être considérée comme le problème principal de la théorie des formes.

Cela revient au fond à étudier des fonctions homogènes entières des coefficients (pouvant d'ailleurs renfermer les variables) qui prennent la même valeur, à une puissance près du déterminant de la substitution, qu'on les forme pour la fonction originaire ou pour la fonction transformée ; c.à.d. qui possèdent, en un mot, la propriété de l'invariance.

Exemples : déterminant d'une courbe du deuxième ordre, ou son équation en coordonnées lignes. — Soit l'équation de la conique :

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

ou symboliquement : $(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 = 0$

ou encore $\Sigma\Sigma a_{ik}x_ix_k = 0$

Son déterminant est :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta$$

il est symétrique par rapport à sa diagonale ($a_{ik} = a_{ki}$)

Soient ses mineurs:

$$\begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{matrix}$$

Si l'on exprime la réunion du pôle et de la polaire, c.à.d. d'un point de la conique et de la tangente en ce point, on a l'équation de la conique en coordonnées-lignes:

$$A_{11} u_1^2 + A_{22} u_2^2 + A_{33} u_3^2 + 2A_{12} u_1 u_2 + 2A_{13} u_1 u_3 + 2A_{23} u_2 u_3 = 0$$

ou, plus simplement, en employant le déterminant Δ encadré avec les u:

(Hesse.)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Appelons A le déterminant des mineurs. S'il s'évanouit, la conique dégénère en un couple de points (de même que si Δ s'évanouit, elle dégénère en un couple de droites) Si le déterminant A et tous ses mineurs sont nuls, la conique se réduit à un point double (cf. page 9.)

On a les relations:

$$A = \Delta^2$$

et pour les mineurs de A:

$$\alpha_{ik} = \Delta a_{ik}$$

Si l'on transforme l'équation de la conique par une substitut. ~~ion~~ linéaire des y aux x; ~~et~~ si r est le déterminant de cette substitution, et si l'équation transformée est:

$$\Sigma\Sigma a'_{ik} y_i y_k = 0,$$

on a respectivement, pour le déterminant de la conique et pour le premier membre de l'éq. en coordonnées tangentielles les identités:



$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix} = \tau^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & v_1 \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & v_2 \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{vmatrix} = \tau^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & u_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}$$

ce qui prouve que l'un et l'autre sont des invariants de la forme :

$$(a_1 x_1 + a_2 x_3 + a_3 x_3)^2 = 0$$

Cet exemple montre en même temps que la théorie des formes ternaires est identique avec la géométrie projective du plan, c. à d. avec la théorie des figures planes, en tant que indépendante des relations métriques. De même, la théorie des formes quaternaires (à 4 variables homogènes) se confond avec la géométrie projective de l'espace. — Quant à la ~~géom~~ théorie des formes algébriques binaires (à 2 variables homogènes), elle correspond à la géométrie des ensembles dont les éléments individuels dépendent d'une seule variable indépendante, et particulièrement à la géométrie des séries de points et faisceaux de rayons.

Interprétation géométrique des formes algébriques binaires :

Les coordonnées x_1 x_2 d'un point sur une droite sont 2 nombres proportionnels aux distances de ce point à 2 points fixes de la droite (multipliées chacune par une constante arbitraire, mais fixe)

cf. page 6.

De même, dans un faisceau de droites, x_1, x_2 sont deux nombres proportionnels aux perpendiculaires abaissées du rayon mobile sur les rayons fondamentaux fixes, la longueur de chaque perpendiculaire étant multipliée par une constante arbitraire mais fixe.

On peut disposer des constantes de manière à réduire les coordonnées homogènes à des rapports anharmoniques. On fixera un 3e point pour lequel $\frac{x_1}{x_2} = 1$, qu'on appelle point de l'unité. Le quotient $\frac{x_1}{x_2}$ pour un point qcque donne le rapport anharmonique qu'il forme avec les 2 points fixes ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$) et avec le point unité ($x_1 = x_2$). Les coordonnées sont ainsi définies d'une manière purement projective.

Signification géométrique des transformations linéaires. Toute substitution linéaire dont le déterminant n'est pas nul correspond à un changement des points fondamentaux et des facteurs constants. (cf. § III, affinité linéaire)

Toute équation homogène entre x_1 et x_2 : $f(x_1 x_2) = 0$ peut être considérée comme une équation où le rapport $\frac{x_1}{x_2}$ est la variable, et donne en général pour ce rapport un nombre déterminé de valeurs ; d'où l'énoncé géométrique :

Une forme algébrique binaire du n^e ordre égalée à zéro représente un système de n points sur une droite.

Ces points peuvent être réels ou imaginaires. Pour représenter ~~les points~~ les racines imaginaires, ~~les~~ nous parlerons de points imaginaires sur la droite, comme nous avons introduit des points semblables dans le plan.



<u>On peut aussi</u> représenter géométriquement les racines imaginaires, en envisageant, d'après Gauss et Cauchy, le plan ~~imaginaire~~ complexe $(x+iy)$ comme champ d'évolution des formes binaires, ou mieux encore en faisant usage de la surface sphérique de Riemann.

Il est alors permis d'énoncer géométriquement tous les théorèmes algébriques, indépendamment de la réalité des variables et même de celle des coefficients dans les formes binaires correspondantes. Nous pouvons donc toujours supposer que ces coefficients sont des grandeurs complexes; alors, en général, aucun point réel ne correspondra à la forme.

La condition pour qu'un tel système de points possède une propriété indépendante de la situation des points fondamentaux est donnée par l'évanouissement d'une fonction rationnelle entière des coefficients de la forme représentative du système de points, fonction ayant la ~~forme~~ propriété de l'invariance. Une semblable fonction est appelée un <u>invariant de la forme</u>.

Etant donné un système de points, il existe en général d'autres systèmes qui ont avec le premier une relation déterminée, indépendante de la situation des points fondamentaux. Un groupe de points de cette sorte est représenté par l'évanouissement d'une fonction qui possède la propriété de l'invariance, mais qui renferme, outre les coefficients de la forme donnée, les variables x_1, x_2. Une telle fonction s'appelle un <u>covariant de la forme</u>.

Si l'on considère plusieurs formes, il y aura des formes invariantes dépendant à la fois des coefficients de ces diverses formes; on les appelle <u>covariants</u> ou <u>invariants simultanés</u> du système, suivant qu'elles renferment ou non les variables.

Exemples : 1° Considérons le jacobien (déterminant fonctionnel) de deux formes f et φ d'ordre quelconque : $\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{vmatrix}$

Substitution linéaire : $\begin{cases} x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2 \\ x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2 \end{cases}$

Soient $F(y_1 y_2)$, $\Phi(y_1 y_2)$ les formes transformées :

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = \alpha \frac{\partial f}{\partial x_1} + \gamma \frac{\partial f}{\partial x_2} \qquad \frac{\partial F}{\partial y_2} = \beta \frac{\partial f}{\partial x_1} + \delta \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} = \beta \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \delta \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$$

Donc :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1} & \frac{\partial F}{\partial y_2} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

Le jacobien de f et φ est un covariant simultané de ces deux formes. Car : $\tau = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}$

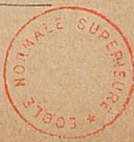
2° Considérons le hessien d'une forme unique : $f(x_1 x_2)$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

En effectuant une substitution linéaire qui transforme ~~f en F~~ $f(x_1 x_2)$ en $F(y_1 y_2)$, on trouve :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y_2 \partial y_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial y_2^2} \end{vmatrix} = \tau^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

Le hessien d'une forme est un covariant de cette forme.



Un invariant simultané de 2 formes f et φ est donné dans tous les cas par la condition que les 2 groupes correspondants de points aient un point commun : car cette condition est indépendante de la position arbitraire des points de base des coordonnées. Pour 2 formes linéaires :

$$f = a_1 x_1 + a_2 x_2 \qquad \varphi = b_1 x_1 + b_2 x_2$$

cet invariant est : $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ c.à.d. leur jacobien

Une forme linéaire ne représentant qu'un point, n'a pas d'invariant.
Une forme quadratique ~~peut avoir~~ a au moins un invariant, qui correspond à la condition d'égalité des racines, c.à.d. de coïncidence des 2 points : si : $f = a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2 = 0$
la condition précédente s'écrit : $a_0 a_2 - a_1^2 = 0$
Or le hessien de la forme quadratique est : $4(a_0 a_2 - a_1^2)$
~~La forme~~ expression $(a_0 a_2 - a_1^2)$ est donc un invariant de la forme f.

Ces exemples d'invariants sont des cas particuliers de formations invariantes plus générales, que l'on appelle résultants et discriminants, et que l'on définit de la manière suivante :

Le résultant de 2 formes f et φ est la fonction entière de leurs coefficients qui doit s'annuler, pour qu'un point du groupe correspondant à f coïncide avec un point du groupe correspondant à φ, autrement dit, pour que les 2 éq : $f = 0$, $\varphi = 0$, aient une racine commune.

Le discriminant d'une forme f est la fonction entière de ses coefficients qui s'annule, lorsque deux points du groupe correspondant à f coïncident, c.à.d. lorsque l'équation : $f = 0$ a deux racines égales.

Le discriminant d'une forme ~~binaire~~ binaire est le résultant de ses deux premières dérivées partielles ; et par suite est du degré $2(n-1)$ relativement aux coefficients de cette forme.

Le discriminant d'une forme f est le carré du produit des différences des racines de l'équation : $f = 0$.

§II. Théorème fondamental :

Si Π est une fonction des coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots. a_n$ d'une forme générale du n^e ordre $f(x_1, x_2)$, possédant la propriété de l'invariance, la forme

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_0} b_0 + \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} b_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} b_2 + \ldots + \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} b_n$$

jouira également de cette propriété de l'invariance, la lettre b désignant les coefficients correspondants d'une autre forme du n^e ordre $\varphi(x_1, x_2)$

Tout invariant ou covariant peut être représenté comme un invariant ou covariant simultané de formes linéaires.

Tout invariant simultané de formes linéaires est ~~un~~ composé de produits d'invariants de ces formes prises deux à deux.

L'invariant de 2 formes linéaires : $a_1 x_1 + a_2 x_2$, $b_1 x_1 + b_2 x_2$

est le déterminant : $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (ab)$ (symboliqᵗ.)

Tout covariant simultané de formes linéaires est composé de produits dont les facteurs sont, soit des invariants de deux des formes linéaires (ab), soit une des formes linéaires elles mêmes.

On écrit symboliqᵗ : $a_1 x_1 + a_2 x_2 = a_x$.



Une forme (binaire) de degré n s'écrit symboliquement :

$$(a_1x_1 + a_2x_2)^n = a_x^n.$$

Tout invariant d'une forme algébrique binaire se représente symboliquement comme la réunion de produits de déterminants symboliques du type (ab) ; tout covariant, comme la réunion de produits de déterminants symboliques (ab) et de facteurs symboliques du type c_x.

La notation symbolique permet donc de reconnaître immédiatement qu'une expression possède la propriété de l'invariance.

– Réciproque. On peut considérer tout invariant ou covariant de formes linéaires, qui contient les coefficients de ces formes à des dimensions convenables, comme la représentation symbolique d'un invariant ou covariant de formes d'un ordre plus élevé.

§ III. Nouvelle interprétation géométrique de la substitution linéaire, opposée à la précédente (v. p. 17). – On peut considérer la transformation linéaire comme une relation entre 2 points différents rapportés aux mêmes éléments de base c.à.d. comme l'expression analytique d'une affinité linéaire. Au moyen des équations :

$$\rho\xi_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \qquad \rho\xi_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$$

nous associons à chaque point d'une droite un autre point de cette même droite. Cette corrélation sera réciproque si le déterminant de la substitution n'est pas nul :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Elle est identique à celle qui lie en général deux séries projectives ; seulement les séries dont il s'agit ici sont réunies sur la même droite de base, et ont les mêmes points fondamentaux.

En effet, le rapport anharmonique de 4 points x, y, z, t est :

$$\alpha = \frac{\mu_1 - \mu_3}{\mu_2 - \mu_3} : \frac{\mu_1 - \mu_4}{\mu_2 - \mu_4}$$

où l'on doit faire : $\mu_1 = \frac{x_1}{x_2}$, $\mu_2 = \frac{y_1}{y_2}$, $\mu_3 = \frac{z_1}{z_2}$, $\mu_4 = \frac{t_1}{t_2}$

donc

$$\alpha = \frac{(xz)(yt)}{(xt)(yz)}$$

Le rapport anharmonique des 4 points correspondants ξ, η, ζ, τ est de même :

$$\alpha' = \frac{(\xi\zeta)(\eta\tau)}{(\xi\tau)(\eta\zeta)}$$

et en vertu de l'invariance des déterminants (xz).. etc $(\xi\zeta)$, on a

$$\alpha = \alpha'$$

car le déterminant de la substitution disparaît dans les 2 fractions. Le rapport anharmonique de 4 points correspondants des 2 séries ayant la même valeur, elles sont projectives.

Les invariants et covariants de formes binaires, égalés à zéro, donnent des équations qui représentent des relations projectives entre les éléments des séries de points et des faisceaux de rayons.

La notion du rapport anharmonique, qui forme la base de la Géométrie synthétique moderne, a également une importance considérable dans la théorie des invariants envisagée en elle-même.

卐 Un invariant ou covariant d'une forme binaire est le numérateur d'une fonction rationnelle de rapports anharmoniques formés des éléments qui répondent aux racines de la forme originaire, et, dans le cas des covariants, d'autres éléments variables.

— Il existe en général 2 points doubles : $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$, sauf le cas où :

$$\left[(a\beta) + (b\alpha)\right]^2 = 4\,(a\alpha)(b\beta)$$

卐 Invariant absolu : v. p. 31.



(les deux séries ayant pour équations: $a_x + \lambda b_x = 0$, $\alpha_x + \lambda \beta_x = 0$ et faisant correspondre les points pour lesquels λ a la même valeur)

Deux invariants:
$$k = (a\beta) - (b\alpha)$$
$$l = k^2 - 4(ab)(\alpha\beta)$$

Le rapport anharmonique formé par les points doubles et par deux points correspondants des deux séries projectives est égal à la constante:
$$\frac{c'}{c} = \frac{k+\sqrt{l}}{k-\sqrt{l}}$$

Si le rapport anharmonique qui caractérise une corrélation projective est égal à une racine n^e de l'unité, on peut, en partant de chacun des points de la série, obtenir un système cyclo-projectif de n points (c.à.d. retomber après n transformations sur le point de départ)

Si au lieu d'une série de points on prend pour représentation géom. un faisceau de rayons, et pour rayons doubles de la transformation lin. les deux droites menées du centre du faisceau aux points circulaires imaginaires, toute transformation équivaut à une rotation du faisceau autour de son centre. La condition de la projectivité cyclique se transforme en celle-ci: un rayon revient à sa position initiale après avoir tourné n fois autour du centre d'un angle déterminé par le rapport $\frac{c'}{c}$.
On est donc conduit aux équations de la division du cercle.

Les n points d'un cycle projectif ne peuvent être tous réels que si $\frac{c'}{c} = -1$, ce qui donne $n = 2$. Dans ce cas (involution) deux points se correspondent toujours réciproquement. Puisque $\frac{c'}{c} = -1$, les deux points correspondants forment avec les points doubles une division harmonique (v. p. 9.) – Condition: $k = 0$.

– Involutions d'ordre plus élevé.

Principe de correspondance de Chasles :

Si l'on a sur une droite une affinité en vertu de laquelle à chaque point x correspondent n points ξ, et à chacun de ces points ξ, m points x, il arrive $(m+n)$ fois qu'un point x coïncide avec un point correspondant ξ.

§ VI. Les collinéations sur le terrain ternaire.

La théorie des formes ternaires s'applique naturellement au plan. Mais, dans la géométrie plane, le point et la droite interviennent comme jouant un rôle semblable (et réciproque) ; nous avons donc à considérer aussi bien les formes ternaires dont les variables sont des coordonnées-points que celles dont les variables sont des coordonnées-lignes. La théorie des formes ternaires a pour objet les propriétés d'une forme ternaire qui ne sont pas troublées par une transformation linéaire (à déterminant différent de zéro) ou, pour parler géométriqt, l'étude des propriétés d'une courbe algébrique qui sont indépendantes de la situation du triangle des coordonnées, soit que l'on considère les figures comme composées de points, soit qu'on les considère comme composées de droites.

La transformation linéaire sur le terrain ternaire est susceptible d'une double interprétation : elle peut d'une part être considérée comme une transformation de coordonnées ; elle peut aussi être regardée comme une relation entre les points de 2 plans différents ; et cette considération correspond plus spécialement à la conception géométrique des invariants.

Imaginons que les deux plans soient réunis (coïncident) et que leurs points soient rapportés au même triangle de coordonnées. Si l'on désigne les coordonnées d'un plan par la lettre x, celles de l'autre plan par la lettre y, les équations linéaires suivantes :



$$\rho y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3$$
$$\rho y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3$$
$$\rho y_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3$$

(où a_{ik} n'est pas nécessairement égal à a_{ki}) établissent entre les 2 plans une affinité linéaire ou collinéation, de telle sorte qu'à chaque point x de l'un des plans correspond un point y (image de x) dans l'autre plan. — Cette correspondance n'est pas en général réciproque; le point correspondant à un point y du second plan est déterminé par les formules :

$$\begin{cases} \sigma x_1 = A_{11} y_1 + A_{21} y_2 + A_{31} y_3 \\ \sigma x_2 = A_{12} y_1 + A_{22} y_2 + A_{32} y_3 \\ \sigma x_3 = A_{13} y_1 + A_{23} y_2 + A_{33} y_3 \end{cases}$$

où les A_{ik} désignent les mineurs correspondants aux a_{ik} dans le déterminant des premières équations, supposé non nul. Les formules sont donc les mêmes que celles de la transformation des coordonnées; mais tandis que là le même point était rapporté à deux systèmes de coordonnées, ici deux points différents sont rapportés au même système.

— A une courbe algébrique correspond toujours dans une affinité linéaire une autre courbe du même ordre.

Les deux courbes auront entre elles certaines propriétés communes qui ne sont pas troublées par les collinéations, et ces propriétés doivent être précisément les mêmes que celles précédemment caractérisées par leur indépendance du système de coordonnées; car la transformation des coordonnées et l'affinité linéaire sont deux manières différentes de considérer la même opération algébrique.

Ces propriétés se traduisent par l'existence des invariants de la forme ternaire $f(x_1\, x_2\, x_3)$, ce qui leur donne une signification géométrique.

Deux courbes qui se correspondent par collinéation sont de la même classe.

Les séries de points et les faisceaux de rayons correspondants d'une collinéation jouissent de la propriété projective.

Détermination géométrique d'une collinéation.

Si à 4 points dont 3 ne sont pas en ligne droite on fait correspondre 4 points dont 3 ne se trouvent pas en ligne droite, l'affinité linéaire se trouve complètement déterminée.

En effet, les 4 points déterminent un faisceau, et les 2 faisceaux sont projectifs.

Toute collinéation peut être considérée comme dérivant géométriqt d'une perspective centrale.

A la droite de l'infini du 1er plan correspond une droite à distance finie du 2e, et à la droite de l'infini du 2e une droite à distance finie du 1er. Ces 2 droites à distance finie sont appelées lignes de fuite.

Si l'on fait tourner l'un des 2 plans sur l'autre de manière à rendre les lignes de fuite parallèles, l'intersection (à dist. infinie) des deux lignes de fuite se correspond à elle-même.

Deux systèmes collinéaires peuvent toujours être, par un changement convenable de position, amenés à être perspectifs.

En effet, on démontre que l'affinité linéaire la plus générale peut être obtenue par la construction suivante: Etant donnés 2 plans dans l'espace, on prend un point O extérieur dans l'espace, et on fait correspondre dans les 2 plans les points qui se trouvent sur un même rayon issu de O. Les séries et les faisceaux qui se correspondent dans les 2 plans sont projectifs et en situation perspective. Si l'on fait coïncider les 2 plans en faisant tourner l'un d'eux autour de leur droite d'intersection, cette droite devient l'axe de collinéation,



et le point O, situé dans l'un et l'autre plan, devient le centre de collinéation ; les deux plans confondus sont dits en situation perspective.

On démontre aussi, directement, que deux plans en collinéation peuvent être mis en situation perspective. Les deux lignes de fuite sont alors parallèles, et la distance du centre de collinéation à l'une d'elles est égale à la distance de l'axe de collinéation à l'autre. Ces 2 longueurs (~~dist~~ cette dist. et celle des deux lignes de fuite) déterminent complètement la collinéation.

Lorsque deux systèmes, qui sont en affinité linéaire, sont placés en situation perspective, 1° tout rayon passant par le centre de collinéation se correspond à lui même; 2° tout point situé sur l'axe de collinéation se correspond à lui-même.

La transformation linéaire a donc pour effet de déplacer chaque point du plan le long du rayon qui le joint au centre O, et de faire tourner chaque droite du plan autour de son point d'intersection avec l'axe de collinéation.

Il existe, ~~en général~~ (dans une collinéation quelconque), 3 points qui coïncident avec leurs correspondants, et 3 droites qui se correspondent à elles-mêmes, à savoir les lignes qui joignent ces 3 points.

Si ces 3 points sont distincts, ils forment un triangle de référence remarquable par la simplicité des coordonnées;

$$\begin{cases} \rho y_1 = \alpha_1 x_1 \\ \rho y_2 = \alpha_2 x_2 \\ \rho y_3 = \alpha_3 x_3 \end{cases}$$

Dans la rotation d'un plan sur lui-même autour d'un point, le centre de rotation est un des 3 points; les 2 autres sont les points circulaires imaginaires. Deux des côtés du triangle de référence sont imaginaires, le 3e est la droite de l'infini.

L'affinité dualistique est définie par les équations:

$$\begin{aligned} \rho u_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ \rho u_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ \rho u_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sigma x_1 &= A_{11} u_1 + A_{21} u_2 + A_{31} u_3 \\ \sigma x_2 &= A_{12} u_1 + A_{22} u_2 + A_{32} u_3 \\ \sigma x_3 &= A_{13} u_1 + A_{23} u_2 + A_{33} u_3 \end{aligned}$$

Elle fait donc correspondre à chaque point une droite, à chaque droite un point, et peut par suite être considérée comme une expression générale du principe de dualité. On doit surtout remarquer les 2 coniques : $\sum\sum a_{ik} x_i x_k = 0$ $\sum\sum A_{ik} u_i u_k = 0$ dont l'une est le lieu des points situés sur les droites qui leur correspondent, et l'autre est l'enveloppe de ces droites. Les deux courbes sont identiques si : $a_{ik} = a_{ki}$, et alors

$\sum\sum A_{ik} u_i u_k = 0$ est l'équation en coordonnées-lignes de la conique : $\sum\sum a_{ik} x_i x_k = 0$.

Dans ce cas, l'affinité dualistique se transforme en réciprocité polaire relative à la conique considérée.

L'affinité dualistique, et spécialement la réciprocité polaire, mérite surtout d'attirer l'attention, parce que c'est par son intermédiaire qu'on a découvert la loi générale de la géométrie qui s'appelle aujourd'hui principe de dualité, et qui trouve son expression fondamentale dans l'emploi des coordonnées-lignes. A une courbe du ne ordre C_n correspond par transformation polaire une courbe de ne classe K_n qui est dite polaire réciproque de C_n. Les propriétés de ces 2 courbes se correspondent en vertu du principe de dualité : l'étude de C_n comme figure tangentielle revient à l'étude de sa polaire réciproque K_n comme figure ponctuelle et inversement. D'où la théorie des figures polaires réciproques.



§ VII. Les formes ternaires en général (courbes en coordonnées ponctuelles ou en coordonnées tangentielles)

L'équation linéaire homogène : $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$

~~exprime~~ est la condition pour qu'il y ait réunion de situation entre le point $\underline{x}$ et la droite $\underline{u}$. Comme cette réunion ne peut être détruite par une collinéation, la forme linéaire $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$ a la propriété de l'invariance. On appelle <u>covariant identique</u> cette expression, qu'on écrit symboliq^t : u_x

D'autre part, étant donné une transformation linéaire :

$$X_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3$$
$$X_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3$$
$$X_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3$$

Soient X, Y, Z les points correspondants aux p. x, y, z ; on a :

du,

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

ou, symboliq^t : $(XYZ) = r\,(xyz)$

ce qui montre que le déterminant des 3 points est un <u>invariant</u>.

Les diverses espèces de fonctions invariantes de formes ternaires sont :

I. <u>Invariants</u>, ne dépendant que des coefficients de la forme.

II. <u>Covariants</u>, dépendant des coefficients et des coordonnées d'un ou plusieurs points variables.

III. <u>Contrevariants</u> ou formes adjointes, ~~de~~ contenant outre les coefficients de la forme des coordonnées lignes.

IV. <u>Formes mixtes</u>, contenant à la fois des coordonnées points et des coordonnées lignes.

Enfin il y a des invariants absolus, c.à.d des fonctions qui restent complètement invariables en cas de transformation linéaire, et qui sont donnés, comme pour les formes binaires, par les quotients de puissances convenables d'invariants. En effet, soient 2 invariants I, I_1 qui deviennent par transformation linéaire I', I_1'. On a par définition : $I' = r^\lambda I$, $I_1' = r^\mu I_1$,

donc : $\frac{I'^\mu}{I_1'^\lambda} = \frac{I^\mu}{I_1^\lambda}$ Ce quotient est un invariant absolu

(rapporter page 23 : ♅)

Toute formation invariante d'un système de formes ternaires peut être représentée comme une réunion de produits symboliques dont les facteurs sont des invariants identiques de la forme : u_x, (xyz) ou (uvw).

Toutes les propriétés invariantes d'une forme ternaire peuvent être représentées par l'évanouissement d'invariants, ou par l'évanouissement identique de covariants, de contrevariants ou de formes mixtes de la forme primitive. (cf. page 18.)

Une courbe de l'ordre n est en général de la classe $n(n-1)$.

Théorème de Bezout : Deux courbes du m^e et du n^e ordre se coupent en mn points (réels ou imaginaires)



§ VII. Les formes ternaires quadratiques (correspondant aux coniques)

Nous n'avons à rechercher ici (de la théorie des invariants) que les propriétés des coniques qui restent invariables dans une transformation linéaire quelconque, c.à.d. qui sont communes à toutes les projections perspectives d'une de ces courbes. Donc... toutes les différences entre l'ellipse, l'hyperbole et la parabole disparaissent, car ces différences reposent sur le caractère des courbes en question relativement à la droite de l'infini. Or comme nous pouvons toujours par collinéation, transformer cette dernière en droite à distance finie et qu'inversement une droite quelconque du plan peut être projetée suivant la droite de l'infini, cette dernière n'a plus ici rien de particulier.

Une conique proprement dite (non évanouissante, c.à.d. $\Delta \gtrless 0$) n'a pas de propriétés projectives: toute conique peut se transformer en une autre ~~par~~ quelconque par collinéation.

En particulier, une forme ternaire quadratique ne peut avoir d'invariant absolu.

Deux coniques ont deux invariants absolus.

Une courbe est en général déterminée par $\frac{n(n+3)}{2}$ de ses points.

Les $n(n-1)$ points de contact des tangentes menées d'un point à une cbe du n^e ordre forment le système complet des intersections de la courbe avec une courbe d'ordre $(n-1)$ qui est la 1e polaire du point.

La cbe d'ordre $(n-1)$ étant déterminée par $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ points, on voit que les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ autres points de contact se trouvent sur la même cbe que les premiers.

Une tangente est une droite qui rencontre une cbe en 2 points coïncidants. Une droite qui rencontre la cbe en 3 p. coïncidants est une tangente d'inflexion.

Les points d'inflexion sont les points d'intersection de la cbe donnée avec la hessienne $\Delta = 0$: leur nombre est donc : $3n(n-2)$.

Δ = hessien de $f(x_1 x_2 x_3)$ [déterminant des secondes dérivées partielles]
Δ est du degré $3(n-2)$; c'est l'ordre de la hessienne.

p. 15 : point de rebroussement. Point multiple.

p. 19 : Sur la hessienne. p. 21. Point double.

p. 32 : point d'inflexion : $x + dy^3 = 0$. Point ~~double~~ de rebrousst : $x^2 + dy^3 = 0$.
Point ordinaire : $x + cy^2 = 0$ (parabole)

p. 43. rebroussᵗ de 2e espèce.

III Dualité. Formules de Plucker.

p. 53 : Règle pour la classe. $k = n(n-1) - 2d - 3r$ $\quad W = 3n(n-2) - 6d - 8r$.

p. 58 : Tableau parallèle : — $3(k-n) = W - r$.

p. 65 : Autre forme (nombre p) – Relation entre les singularités réelles

p. 69 : 1 p. mult. d'ordre r équivaut à $\frac{r(r-1)}{2}$ p. doubles.

p. 96 : La jacobienne de 3 courbes.

p. 113 : La méthode des caractéristiques. Géométrie du nombre

p. 127 : Nombre des coniques ~~touchant~~ 5 courbes données.

p. 146 : Extension du principe de correspondance.

p. 188 : Représentation univoque de deux plans l'un sur l'autre par une transformation non linéaire.



34

p. 207, 208 : Transformation Cremona. Invariance relative à cette transformation

p. 228. Points d'inflexion des courbes du 3e ordre

p. 270 : Procédé de Grassmann pour décrire les coniques, cubiques &c.

p. 277 : Formes cubiques ternaires.


ECOLE NORMALE SUPERIEURE

Riemann

Riemann



A

lignes géodésiques = kürzeste Linien

selbständig, vollständig (différentielles)
~~totales~~ ?

<u>Geheimer</u> Hofrath : ~~privé~~ intime ?

demi-grands-cercles ou grands demi-cercles ?

portions de surfaces ? Flächenstücke

directions superficielles : Flächenrichtungen

Veränderlichkeit = Variabilité ~~xxxxxx~~ ?

gelehrten Anzeigen : publications savantes ?
notices, programmes ?

infiniment petits de la <u>n</u>e <u>dimension</u> ?



B

III. Application à l'espace

§1. Système de faits qui suffisent à déterminer les rapp. métriques de l'espace, tels que la Géom. les expose.

La courbure est nulle en ch. p. dans les 3 dir. superf. principales.
Si l'on admet que les corps (et non pl. seul. les lignes) sont indép. du lieu, (Euclide) la courbure est constante, et tous les tr. ont la même somme d'angles.

Au lieu de l'indép. de la long. des lignes par rapp. au lieu et à la direction, on pourrait supp. l'indép. de la long. et de la direction par rapp. au lieu.

§2. Considérations sur l'infiniment grand.

§3. Considérations sur l'infiniment petit et sur l'explication de la nature.



Riemann. Sur les hypothèses qui sont à la base de la géométrie
(extrait du 13e volume des Mémoires de la société royale des sciences
de Gœttingue.) (1)

Plan de la recherche.

On sait que la géométrie suppose tant le concept de l'espace que les premiers concepts fondamentaux pour les constructions dans l'espace comme quelque chose de donné. Elle en donne seulement des définitions nominales, tandis que les déterminations essentielles se présentent sous forme d'axiomes. De plus le rapport de ces hypothèses reste dans l'obscurité; on n'en voit ni si et dans quelle mesure leur liaison est nécessaire, ni a priori si elle est possible.

Aussi, depuis *Euclide* jusqu'à *Legendre*, pour nommer le plus célèbre de ceux qui ont travaillé la géométrie de nos jours, cette obscurité n'a été dissipée ni par les mathématiciens, ni par les philosophes qui s'en sont occupés. La raison en est sans doute que le concept général de grandeurs multiplement étendues, qui comprend les grandeurs spatiales, n'a pas été élaboré. C'est pourquoi je me suis proposé tout d'abord de construire le concept d'une grandeur multiplement étendue avec des concepts généraux de grandeur. Il en résultera qu'une grandeur multiplement étendue est capable de divers rapports métriques, et que l'espace ne forme ainsi qu'un cas particulier d'une grandeur triplement étendue. Or de là il suit nécessairement que les propositions de la géométrie ne se laissent pas déduire de concepts généraux de grandeur, mais que les propriétés par lesquelles l'espace se distingue des autres grandeurs

---

(1) Ce mémoire a été lu par l'auteur le 10 juin 1854 dans le colloque institué avec la Faculté philosophique de Gœttingue en vue de son habilitation. — C'est ce qui explique la forme de l'exposition, dans laquelle les recherches analytiques ne pouvaient être qu'indiquées; on en trouve quelques développements dans la Réponse à la question proposée en prix par l'Académie des sciences de Paris, parmi les notes (note I) XXII, Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Illma Academia Parisiensi propositae. [Note de Dedekind

triplement étendues qu'on peut penser ne peuvent être tirés que de l'expérience. De là naît le problème de rechercher les faits les plus simples, ~~par~~ qui servent à déterminer les rapports métriques de l'espace, problème qui, par la nature de l'objet, n'est pas complètement déterminé; car on peut proposer plusieurs systèmes de faits simples qui suffisent à déterminer les rapports métriques de l'espace; le plus important pour le but présent est celui qu'Euclide a posé en principe. Ces faits, comme tous les faits, ne sont pas nécessaires, mais seulement d'une certitude empirique; ce sont des hypothèses; on peut donc examiner leur ~~vraisemblance~~ probabilité, qui est très grande assurément dans les limites de l'observation, et juger ensuite de la légitimité de leur extension hors des limites de l'observation, tant du côté de l'infiniment grand que du côté de l'infiniment petit.

I. Concept d'une grandeur n fois étendue.

En essayant maintenant de résoudre d'abord le premier de ces problèmes (à savoir) le développement du concept de grandeurs multiplement étendues, je crois pouvoir d'autant plus réclamer un jugement indulgent, que je suis peu exercé dans ces sortes de travaux de nature philosophique, où les difficultés résident plus dans les concepts que dans la construction, et que, en dehors de quelques indications très courtes, que Monsieur le Conseiller aulique intime Gauss a donnés là-dessus dans le second mémoire sur les restes (purs) biquadratiques, dans les publications savantes de Gœttingue et dans son écrit de jubilé, et quelques recherches philosophiques d'Herbart, je n'ai pu employer absolument aucun travail antérieur.

1.

Des concepts de grandeur ne sont possibles que là où se trouve un concept général, qui admet divers modes de détermination. Suivant que ~~l'on peut passer~~ de l'un à l'autre de ces modes de détermination il existe ou non un passage continu, ils forment une multiplicité (1) continue ou discrète; les modes de détermination particuliers (einzeln) s'appellent dans le premier cas des points, dans le dernier des éléments de la multiplicité.

(1) Mannichfaltigkeit.

Les concepts dont les modes de détermination forment une multiplicité discrète sont si nombreux, qu'on peut toujours trouver pour des objets donnés à volonté, au moins dans les langues civilisées, un concept qui les embrasse (compris) (aussi ~~et~~ les mathématiciens pourraient, dans la théorie des grandeurs (Dans lesquelles sont) discrètes partir sans scrupule de cette demande : considérer les objets donnés comme ~~semblables~~ de même espèce); au contraire, les occasions de former des concepts dont les modes de détermination forment une multiplicité continue sont si rares dans la vie commune, que les lieux des objets ~~des sens~~ sensibles et les couleurs sont peut-être les seuls concepts simples dont les modes de détermination forment une multiplicité multiplement étendue. Des occasions plus fréquentes d'engendrer et de développer ces concepts ne se trouvent que dans la mathématique supérieure.

Des parties déterminées d'une multiplicité, distinguées par un signe ou ~~par~~ une borne, s'appellent ~~quantités~~ (Quanta). Leur comparaison sous le rapport de la quantité se fait, dans les grandeurs discrètes par le dénombrement, dans les grandeurs continues par la mesure. La mesure consiste en une superposition des grandeurs à comparer ; pour mesurer il faut donc un moyen de transporter l'une des grandeurs comme étalon pour l'autre. ~~Si ce moyen manque~~ Faute de ce moyen, on ne peut comparer deux grandeurs que quand l'une est une partie de l'autre, et encore ne peut-on alors décider que le plus ou moins, non le combien. Les recherches qu'on peut instituer sur elles dans ce cas forment une partie de la ~~théorie~~ science des grandeurs indépendante des déterminations métriques, où les grandeurs ne sont pas considérées comme indépendantes ~~du lieu~~ de la position, ni comme exprimables au moyen d'une unité, mais comme domaines dans une multiplicité. De telles recherches sont devenues nécessaires pour plusieurs parties de la mathématique, notamment pour traiter les fonctions analytiques multiformes, et leur absence est sans doute la cause principale pour laquelle le célèbre théorème d'Abel et les ~~travaux~~ contributions de Lagrange, Pfaff, Jacobi ~~sur~~ la théorie générale des équations différentielles sont restés si longtemps infructueux.



Pour le but présent, il suffit d'extraire de cette partie générale de la science des grandeurs étendues, où l'on ne suppose rien de plus que ce qui est déjà contenu dans leur concept, deux points, dont le premier concerne la génération du concept d'une multiplicité multiplement étendue; le second concerne la réduction des déterminations de lieu dans une multiplicité donnée à ~~le~~ des déterminations de quantité, et ~~il~~ rendra manifeste le caractère essentiel d'une étendue à n sens d'ordre n de multiplicité (n fach)

2.

Si dans un concept dont les modes de détermination forment une multiplicité continue, on passe d'un mode de détermination à l'autre d'une manière déterminée, les modes de détermination parcourus forment une multiplicité simplement étendue, dont le caractère essentiel est, qu'un passage continu n'y est possible à partir d'un point que dans deux sens, en avant ou en arrière. Si l'on conçoit maintenant que cette multiplicité passe encore dans une autre, complètement distincte, et cela toujours d'une manière déterminée, c.à.d. de telle sorte que chaque point passe en un point déterminé de l'autre, ~~elles forment ensemble~~ les modes de détermination ainsi obtenus forment ensemble une multiplicité doublement étendue. De la même façon on obtient une multiplicité triplement étendue, en se figurant qu'une multiplicité doublement étendue passe dans une autre complètement distincte d'une manière déterminée, et il est facile de voir comment on peut continuer cette construction. Si, au lieu de considérer le concept comme déterminable, on considère son objet comme variable, on peut définir cette construction comme ~~une~~ composant une variété (Veränderlichkeit) de $n+1$ dimensions avec une variété de n dimensions et une variété de ~~1~~ une dimension.

3.

Je vais maintenant montrer comment inversement on peut décomposer une variété dont le domaine est donné en une variété d'une dimension et une variété de moins de dimensions. A cette fin, qu'~~on~~ l'on conçoive un ~~partie~~ segment variable d'une multiplicité d'une dimension (compté à partir d'une ~~point~~ origine fixe, de telle sorte que les valeurs de cette ~~partie~~ segment soient comparables entre elles), qui pour chaque point de la multiplicité donnée prend une valeur déterminée ~~qui~~ variant avec lui d'une façon continue, ou, en d'autres termes, qu'on prenne à l'intérieur de la multiplicité donnée une fonction continue du lieu, et une fonction telle, qu'elle ne soit pas constante le long d'une partie de cette multiplicité. Chaque système de points où la fonction a une valeur constante forme alors une multiplicité continue de moins de dimensions que la (m.) donnée. Ces multiplicités passent l'une dans l'autre d'une manière continue quand la fonction varie; on pourra donc admettre que l'une d'elles engendre les autres, et ~~il~~ cela pourra arriver, généralement parlant, de telle sorte que chaque point passe en un point déterminé des autres; les cas d'exception, (de la première) dont la recherche est importante, peuvent être ici négligés. Par là la détermination de lieu dans la multiplicité donnée est ramenée à une détermination de grandeur et à une détermination de lieu dans une multiplicité d'ordre moindre (minderfach ausgedehnten) Il est maintenant facile de montrer que cette multiplicité a $n-1$ dimensions, si la multiplicité donnée est une étendue à n sens (n fach ausgedehnte). En répétant n fois cette opération, la détermination de lieu dans une multiplicité n fois étendue est ramenée à n déterminations de grandeur, et ainsi la détermination de lieu dans une multiplicité donnée, quand cela est possible, est ramenée à un nombre fini de déterminations de quantité. Cependant il y aussi des multiplicités

où la détermination de lieu exige non un nombre fini, mais soit une série infinie, soit une multiplicité continue de déterminations de grandeur. C'est de telles multiplicités que forment par exemple les déterminations possibles d'une fonction pour un domaine donné, les formes possibles d'une figure spatiale, etc.

II. Rapports (métriques / de mesure) dont est capable une multiplicité de n dimensions, {sous la condition que / dans l'hypothèse où} les lignes possèdent une longueur indépendamment du lieu, de sorte que ~~chaque~~ multiples ligne ~~soit~~ est mesurable ~~par~~ formes par les autres ~~chaque ligne~~.

Maintenant que (l'on a construit) le concept d'une multiplicité (à n dimensions) n fois étendue (est construit) et qu'on a trouvé comme caractère essentiel de cette mult. que la détermination de lieu ~~multi~~ s'y laisse ramener à n déterminations de grandeur, suit le second des problèmes posés plus haut, à savoir, rechercher les rapports métriques dont est capable une telle multiplicité, et les conditions qui suffisent à déterminer ces rapports métriques. Ces rapports métriques ne peuvent être recherchés qu'~~dans~~ en des concepts abstraits de grandeur, et ~~exposés~~ représentés ~~qu~~ dans leur ~~connexion~~ dépendance mutuelle enchaînement que par des formules; on peut cependant sous certaines ~~conditions~~ hypothèses les décomposer en rapports qui, pris isolément, sont susceptibles d'une représentation géométrique, et par là il devient possible d'exprimer géométriquement les résultats du calcul. Aussi, pour prendre un terrain solide, on ne doit pas éviter ~~une~~ une recherche abstraite par formules, mais les résultats pourront en être exposés sous un vêtement géométrique. Les principes de l'une et de l'autre (?) méthode sont contenus dans le célèbre mémoire de Monsieur le Conseiller aulique intime Gauss sur les surfaces courbes.

1.

Des déterminations métriques exigent que les grandeurs soient indépendantes du lieu, ce qui peut se faire de plus d'une manière; l'hypothèse qui se présente tout d'abord, et que je veux poursuivre ici, est sans doute que la

longueur des lignes soit indépendante ~~du lieu~~ de la position, de sorte que ~~chaque~~ toutes les lignes soient mesurables ~~par chaque ligne~~ les unes par les autres. Si la détermination de lieu est ramenée à des déterminations de grandeur, (la position d'un point dans la multiplicité n fois étendue donnée càd le est exprimée par n grandeurs variables x_1, x_2, x_3, et ainsi de suite jusqu'à x_n, la détermination d'une ligne proviendra de ce que les grandeurs x sont données comme fonctions d'une seule variable. Le problème est alors de poser pour la longueur des lignes une expression mathématique, et pour cela il faut que les grandeurs x soient considérées comme exprimables en unités. Je ne traiterai ce problème que sous certaines restrictions, et je me restreins, en premier ~~lieu~~ lieu aux lignes où les rapports entre les grandeurs dx (variations correspondantes des grandeurs x) varient d'une manière continue; on peut alors concevoir les lignes décomposées en éléments à l'intérieur desquels les rapports des grandeurs dx peuvent être considérés comme constants, et le problème revient alors à ceci: poser pour chaque point une expression générale de l'élément linéaire ds qui en est issu, expression qui contiendra ainsi les grandeurs x et les grandeurs dx. J'admets ~~ensuite~~ maintenant en second lieu, que la longueur de l'élément linéaire reste invariable ~~en négligeant~~ abstraction faite des grandeurs du deuxième ordre, quand tous ses points subissent le même déplacement infiniment petit, ce qui implique en même temps que lorsque toutes les grandeurs dx croissent dans le même rapport, l'élément linéaire varie également dans ce rapport. Sous ces hypothèses, l'élément linéaire pourra être une fonction homogène arbitraire du premier degré des grandeurs dx, qui reste invariable quand toutes les grandeurs dx changent de signe, et où les constantes arbitraires ~~seraient~~ sont des fonctions continues des grandeurs x. Pour trouver les cas les plus simples, je cherche d'abord une expression pour les multiplicités $(n-1)$ fois étendues qui sont partout à une distance égale de l'origine de l'élément linéaire, càd je cherche une fonction continue du lieu, qui les distingue les unes des autres. Cette fonction devra forcément croître ou décroître à



partie de l'origine dans tous les sens; je suppose qu'elle croît en tous sens, et par suite a un minimum au point considéré. Il faut alors, si ses ~~quotients différentiels~~ dérivées première et seconde sont finies, que la différentielle du premier ordre ~~disparaisse~~ s'évanouisse, et celle du second ordre ne peut jamais être négative; je suppose qu'elle reste toujours positive. Cette expression différentielle du second ordre reste alors constante, si <u>ds</u> reste constant, et croît en rapport carré, si les grandeurs <u>dx</u> et par suite aussi <u>ds</u> varient ensemble dans le même rapport; elle est donc égale à ds^2, et conséquemment <u>ds</u> est égal à la racine carrée d'une fonction homogène entière toujours positive et du second degré des grandeurs <u>dx</u> où les coefficients sont des fonctions continues des grandeurs <u>x</u>. Pour l'espace, quand on exprime la position des points en coordonnées rectangulaires, on a $ds = \sqrt{\Sigma (dx)^2}$; l'espace est ainsi ~~compris~~ contenu dans ce cas le plus simple. Le cas le plus simple ensuite comprendrait ~~les dont~~ les multiplicités où l'élément linéaire peut s'exprimer par la racine quatrième d'une expression différentielle ~~qu~~ du quatrième degré. La recherche de ce genre plus général n'exigerait pas sans doute des principes essentiellement différents, mais elle prendrait un certain temps et ~~ne~~ jetterait relativement peu de lumière sur la théorie de l'espace, d'autant plus que les résultats ne pourraient s'exprimer géométriquement; je me restreins donc aux multiplicités où l'élément linéaire ~~s'exprime~~ est exprimé par la racine carrée d'une expression différentielle du second degré.

On peut transformer une telle expression en une autre semblable, en posant pour les <u>n</u> variables indépendantes des fonctions de <u>n</u> nouvelles variables indépendantes. Mais par ce moyen on ne pourra pas transformer ~~chaque~~ toutes les expressions ~~les unes~~ dans les autres; car l'expression contient $n\frac{n+1}{2}$ coefficients, qui sont des fonctions arbitraires des variables indépendantes; or, en introduisant de nouvelles variables on ne pourra satisfaire qu'à <u>n</u> relations, et par suite on ne pourra rendre que <u>n</u> des coefficients égaux à des grandeurs données. Alors Les $n\frac{n-1}{2}$ autres sont ~~alors~~ déjà complètement

déterminés par la nature de la multiplicité à représenter, et par suite $n\frac{n-1}{2}$ fonctions du lieu sont nécessaires pour déterminer ses rapports métriques. Les multiplicités où l'élément linéaire, comme dans le plan et dans l'espace, se laisse mettre sous la forme $\sqrt{\Sigma dx^2}$, ne forment donc qu'un cas particulier des multiplicités que nous recherchons ici; elles méritent un nom particulier; j'appellerai donc planes ces multiplicités où le carré de l'élément linéaire peut se ramener à la somme des carrés de différentielles [indépendantes]. Pour pouvoir maintenant ~~considérer~~ découvrir les différences essentielles de toutes les multiplicités qu'on peut représenter dans la forme ~~précédemment énoncée~~ présupposée, il est nécessaire de mettre de côté celles qui dérivent de la manière de représenter, ce qui sera atteint par le choix des grandeurs variables d'après un principe déterminé.

selbständig

2.

A cette fin, qu'on conçoive construit à partir d'un point arbitraire le système des lignes ~~les plus courtes~~ géodésiques qui en sont issues; la position d'un point indéterminé pourra alors être déterminée par la direction initiale de la ligne ~~la plus courte~~ géodésique où il est situé, et par son éloignement de l'origine sur cette ligne; elle ~~pourra~~ peut donc être exprimée par les rapports des grandeurs dx_0, c.à.d. des grandeurs dx à l'origine de cette ligne ~~plus courte~~ géodésique et par la longueur s de cette ligne. Qu'on introduise maintenant, au lieu des dx_0, des expressions linéaires $d\alpha$ formées avec les dx_0, ~~et~~ et telles ~~sorte~~ [illegible] que la valeur initiale du carré de l'élément linéaire devienne égale à la somme des carrés de ces expressions, de sorte que les variables indépendantes soient: la grandeur s et les rapports des grandeurs $d\alpha$; qu'on ~~[illegible]~~ substitue enfin ~~au lieu des~~ aux $d\alpha$ des grandeurs proportionnelles $x_1, x_2, \ldots x_n$, telles que la somme de leurs carrés devienne égale à s^2. Si l'on introduit ces grandeurs, le carré de l'élément linéaire devient, pour ~~les valeurs in~~ infiniment petites des x, égal à Σdx^2; le terme de l'ordre suivant devient égal à une expression homogène du second degré des $n\frac{n-1}{2}$



grandeurs ($x_1 dx_2 - x_2 dx_1$), ($x_1 dx_3 - x_3 dx_1$), ..., c.à.d. une grandeur infiniment petite de la quatrième dimension, de sorte qu'on obtient une grandeur finie, quand on la divise par le carré du triangle infiniment petit, dont les sommets répondent aux valeurs des variables (0, 0, 0, ...), (x_1, x_2, x_3, ...), (dx_1, dx_2, dx_3, ...). Cette grandeur conserve la même valeur, tant que les grandeurs x et dx sont contenues dans les mêmes formes linéaires binaires, ou tant que les deux lignes ~~les plus courtes~~ géodésiques, de la valeur 0 à la valeur x, et de la valeur 0 à la valeur dx, restent dans le même élément superficiel; elle ne dépend donc que du lieu et de la direction de cet élément. Elle devient évidemment égale à 0, quand la multiplicité représentée est plane, c.à.d. quand ~~si~~ le carré de l'élément linéaire est réductible à Σdx^2; elle peut donc être ~~considérée~~ regardée comme la mesure de la quantité dont la multiplicité s'~~éloigne~~ écarte de la « planité » en ce point et dans cette direction superficielle. Multipliée par $-\frac{3}{4}$, elle devient égale à la grandeur que Monsieur le Conseiller aulique intime Gauss a nommé la courbure d'une surface. ~~Pour déterminer~~ On a trouvé ci-dessus que $n\frac{n-1}{2}$ fonctions du lieu sont nécessaires pour déterminer les rapports métriques d'une multiplicité n fois étendue qu'on peut représenter dans la forme présupposée; si donc ~~la co~~ on donne la courbure en chaque point dans $n\frac{n-1}{2}$ directions superficielles, les rapports métriques de la multiplicité pourront être par là déterminés, ~~ou tant~~ pourvu qu'entre ces valeurs il n'existe aucune relation identique, ce qui en fait, généralement parlant, n'est pas le cas. Les rapports métriques de ces multiplicités où l'élément linéaire est exprimé par la racine carrée d'une expression différentielle du second degré, peuvent ainsi s'exprimer d'une manière complètement indépendante du choix des grandeurs variables. On peut suivre une voie toute semblable ~~vers à cette fin~~ pour atteindre ce but dans les multiplicités où l'élément linéaire s'exprime moins simplement, par exemple par la racine quatrième d'une expression différentielle du quatrième degré.

L'élément linéaire ne pourrait plus alors, généralement parlant, se ramener à la forme de la racine carrée d'une somme de carrés d'expressions différentielles, et par suite, dans l'expression du carré de l'élément linéaire l'é~~loign~~cartement de la planéité serait une grandeur infiniment petite de la deuxième dimension, tandis que dans les précédentes multiplicités elle était une grandeur infiniment petite de la quatrième dimension. Cette ~~partie~~ propriété des dernières multiplicités peut donc être nommée planéité dans les plus petites parties. La propriété ~~la plus importante~~ de ces multiplicités pour le but présent ~~de ces multiplicités~~, celle pour laquelle elles ont été seules recherchées ici, est que les rapports des multiplicités doublement étendues peuvent se représenter par des surfaces, et ceux des multiplicités d'ordre supérieur (mehrfach ausgedehnten) se réduire à ceux des surfaces qu'elles contiennent; ce qui a encore besoin à présent d'une courte explication.

3.

Dans la conception des surfaces, à côté des rapports métriques internes où l'on ne considère que la longueur des lignes (qui y sont tracées), se mêle toujours aussi leur position par rapport à des points situés hors d'elles. Mais on peut faire abstraction des [leurs] rapports extérieurs, en leur ~~supposant~~ attribuant des variations telles, que les longueurs de leurs lignes restent invariables, c.à.d. en concevant qu'elles se ploient ~~arbitraire~~ à volonté (sans extension), et en considérant comme de même espèce toutes les surfaces qui naissent ainsi les unes des autres. C'est ainsi, par exemple, que des surfaces cylindriques ou coniques quelconques équivalent à un plan, parce qu'elles peuvent en être formées par une simple flexion où subsistent les rapports métriques internes; et toutes les propositions concernant ces rapports (par suite ~~toute~~ la planimétrie entière) conservent leur valeur; au contraire, ces surfaces sont essentiellement différentes de la sphère, qui ne se laisse pas transformer en un plan (sans extension). D'après la recherche précédente, les rapports métriques d'une grandeur doublement étendue, quand l'élément linéaire peut s'exprimer par la racine carrée d'une expression différentielle du



second degré, comme c'est le cas pour les surfaces, sont caractérisées en chaque point par la courbure. Maintenant cette grandeur ~~admet~~ reçoit dans les surfaces cette ~~interprétation~~ ~~signification~~ intuitive, savoir qu'elle est le produit des deux courbures de la surface en ce point, ou bien encore que ~~leur~~ son produit ~~dans~~ par l'aire d'un triangle infiniment petit formé de lignes ~~les plus courtes~~ géodésiques est égal au demi-excès de la somme de ses angles sur deux droits en parties du rayon. La première définition supposerait ce théorème, que le produit des deux rayons de courbure reste invariable dans la simple flexion d'une surface. La seconde, qu'en un même lieu l'excès de la somme des angles d'un triangle infiniment petit sur deux droits est proportionnel à son contenu (à son aire). Pour donner à la courbure d'une multiplicité n fois étendue en un point donné et pour une direction superficielle donnée passant par ce point une signification saisissable, il faut partir de ce fait, qu'une ligne ~~la plus courte~~ géodésique issue d'un point est complètement déterminée quand on donne sa direction initiale. On obtiendra ensuite une surface déterminée, si l'on prolonge en ~~lignes géodésiques~~ toutes les directions initiales issues du point donné et situées dans l'élément superficiel donné ~~en lignes les plus courtes~~, et cette surface a au point donné une courbure déterminée, qui est en même temps la courbure de la multiplicité n fois étendue au point donné et dans la direction superficielle donnée.

4.

Avant de faire l'application à l'espace, quelques considérations sont encore nécessaires sur les multiplicités planes en général, c.à.d. sur celles où le carré de l'élément ~~linéaire~~ peut ~~être représenté~~ par une somme de carrés de différentielles (indépendantes) vollständig totales?

Dans une multiplicité plane n fois étendue la courbure est nulle en chaque point pour toutes les directions; mais d'après la recherche précédente, il suffit, pour déterminer les rapports métriques, de savoir qu'elle est ~~nulle~~ en chaque point pour $n\frac{n-1}{2}$ directions superficielles dont les courbures sont indépendantes les unes des autres. Les multiplicités

dont la courbure est partout égale à 0, peuvent être considérées comme un cas particulier des multiplicités dont la courbure est constante en tout lieu. Le caractère commun de ces multiplicités dont la courbure est constante peut aussi s'exprimer par ce fait que les figures peuvent s'y mouvoir sans extension. Car évidemment les figures ne pourraient s'y transporter ni y tourner à volonté, si la courbure n'était pas la même en chaque point et dans toutes les directions. Mais, d'autre part, les rapports métriques de la multiplicité sont entièrement déterminés par la courbure; donc les rapports métriques autour d'un point dans toutes les directions sont exactement les mêmes qu'autour d'un autre; ainsi les mêmes constructions peuvent être exécutées à partir de ce point, et par suite on peut donner ~~à volonté~~ telle place qu'on voudra aux figures dans les multiplicités à courbure constante. Les rapports métriques de ces multiplicités ne dépendent que de la valeur de la courbure, et l'on peut remarquer, ~~touchant~~ au sujet de la représentation analytique, que si l'on désigne cette valeur par α, on peut donner à l'expression de l'élément linéaire la forme:

$$\frac{\sqrt{\Sigma\, dx^2}}{1+\frac{\alpha}{4}\Sigma x^2}$$

5.

La considération des surfaces à courbure constante peut servir à l'éclaircissement géométrique. Il est facile de voir que les surfaces dont la courbure est positive, se laisseront ~~enrouler~~ toujours enrouler sur une sphère dont le rayon est égal à 1 divisé par la racine de la courbure; mais pour découvrir toute la multiplicité de ces surfaces, qu'on donne à l'une d'elles la forme d'une sphère, et aux autres la forme de surfaces de révolution ~~tangentes~~ qui la ~~touchent~~ lui sont tangentes suivant l'équateur. Les surfaces de plus grande courbure que cette sphère



~~toucheront~~ Elles seront alors tangentes intérieurement, et prendront ~~une forme~~ comme la partie opposée à l'axe de la surface d'un anneau ; elles se laisseraient enrouler sur des zones de sphères de plus petit rayon, mais en faisant plus d'un tour. On obtiendra les surfaces de courbure (moindre ~~et~~ positive) en découpant sur des ~~surfaces~~ sphères de plus grand rayon un fuseau limité par deux grands demi-cercles et en réunissant les coupures. La surface de courbure nulle sera un cylindre ayant pour base l'équateur ; les surfaces de courbure négative seront tangentes extérieurement à ce cylindre, et auront la forme de la partie intérieure, tournée vers l'axe de la surface d'un anneau. ~~Si~~ Si l'on considère ces surfaces comme lieux pour des portions ~~superficielles~~ mobiles de surfaces ~~comme~~ de même que l'espace ~~comme~~ lieu des corps, dans toutes ces surfaces les portions de surfaces ~~en te~~ seront mobiles sans extension. Les surfaces à courbure positive se laissent toujours mettre sous une forme ~~de forme~~ ~~de~~ telle ~~sorte~~ que les portions de surface peuvent s'y mouvoir aussi sans flexion, à savoir ~~en~~ surfaces sphériques, mais non les surfaces à courbure négative. Outre cette indépendance de ~~dance~~ forme des portions de surface par rapport au lieu, les surfaces à courbure nulle admettent aussi leur indépendance de la direction par rapport ~~au~~ lieu, que n'admettent pas les autres surfaces.

III. Application à l'espace

1.

Après ces recherches sur la détermination des rapports métriques d'une grandeur n fois étendue, on peut ~~maintenant~~ énoncer les conditions qui sont nécessaires et suffisantes pour déterminer les rapports métriques de l'espace, quand on suppose que les lignes sont indépendantes du lieu et que l'élément linéaire peut se représenter par la racine carrée d'une expression différentielle du second degré, ~~et~~ par suite que les plus petites parties sont planes.

~~En premier lieu~~, 1° ~~Elles~~ Ils se laissent exprimer de telle sorte, que la courbure ~~en ch~~ soit égale à 0 en chaque point pour trois directions

superficielles, et par là sont déterminés les rapports métriques de l'espace, quand la somme des angles du triangle est partout égale à deux droits.

~~En dernier lieu~~ 2° Si l'on suppose, comme ~~avec~~ Euclide, que non seulement ~~que~~ les lignes ~~existent indépendamment du lieu~~, mais aussi ~~encore~~ les corps, il s'ensuit que la courbure est partout constante, et ~~par cons~~ alors la somme des angles est déterminée dans tout triangle dès qu'elle l'est dans un seul.

3° Enfin, ~~on pourrait en troisième lieu~~, au lieu d'admettre ~~que~~ les longueurs des lignes ~~sont~~ comme indépendantes du lieu et de la direction, on pourrait supposer aussi que leur longueur et leur direction sont indépendantes du lieu. D'après cette conception, les ~~variations~~ changements de lieu ou les différences de lieu sont des grandeurs complexes exprimables par trois unités indépendantes.

2.

Au cours des précédentes considérations on a d'abord séparé les rapports d'~~extension~~ étendue ou de domaine des rapports de mesure, et trouvé que dans les mêmes rapports d'étendue on peut penser différents rapports métriques; alors on a recherché les systèmes de rapports métriques simples par lesquels les rapports métriques de l'espace sont complètement déterminés, et dont toutes les propositions ~~relatives à elles~~ concernant ci sont une conséquence nécessaire; il reste à examiner la question, dans quelle mesure et dans quelle étendue ces hypothèses sont garanties par l'expérience. A cet égard il existe entre les purs rapports ~~d'étendue~~ et les rapports métriques une différence essentielle, en ce que dans les premiers, où les cas possibles forment une multiplicité discrète, les témoignages de l'expérience ne sont sans doute pas ~~certains~~ parfaitement certains, mais ne sont pas inexacts, tandis que dans les derniers, où les cas possibles forment une multiplicité continue, chaque détermination de l'expérience reste toujours inexacte: il n'est plus aussi ~~vraisemblable~~ probable qu'elle ~~est~~ soit à peu près



exacte. Cette circonstance est importante dans l'extension de ces déterminations empiriques au delà des bornes de l'observation dans l'infiniment grand et ~~dans~~ l'infiniment petit ; car ~~ceux-ci~~ les derniers peuvent évidemment devenir ~~toujours~~ de plus en plus inexacts au-delà des bornes de l'observation, mais non les premiers.

Dans l'extension des constructions spatiales ~~dans~~ à l'infiniment grand, il faut distinguer l'illimité et l'infini : celui là appartient aux rapports d'étendue, celui-ci aux rapports métriques. Que l'espace soit une multiplicité ~~illimitée et~~ triplement étendue et illimitée, c'est une hypothèse qui est appliquée dans toute conception du monde extérieur, d'après laquelle, à chaque instant le domaine des perceptions réelles ~~se complète~~ et l'on ~~construit~~ ou complète les lieux possibles d'un objet cherché, et qui se confirme continuellement par ces applications. L'~~infinité~~ illimitation de l'espace acquiert par là une certitude empirique plus grande que toute autre ~~perception~~ expérience extérieure. Mais ~~il n'en résulte nullement~~ l'infinité ne s'en suit nullement ; ~~bien plutôt~~ si l'on suppose les corps indépendants des lieux, ~~l'espace~~ c.à.d. si on assigne à l'espace une courbure constante, ~~il devrait bien plutôt~~ il serait nécessairement fini tant que cette courbure aura une valeur positive, si petite qu'elle ~~fût~~ soit. En prolongeant en lignes ~~les plus courtes~~ géodésiques les directions initiales situées dans un élément superficiel, on obtiendrait une surface illimitée de courbure constante, c.à.d. une surface qui pourrait prendre dans une multiplicité plane triplement étendue la forme d'une sphère, et qui conséquemment ~~est~~ serait finie.

3.

Les questions sur l'infiniment grand sont superflues pour l'explication de la nature. Mais il ~~est~~ en va autrement des questions sur l'infiniment petit. C'est sur l'exactitude avec laquelle nous poursuivons les phénomènes dans l'infiniment petit que repose essentiellement la connaissance de leur ~~connex~~ enchaînement causal. Les progrès

[~~de la connaissance de la nature mécanique dans les derniers siècles~~]
(~~ou~~) des derniers siècles dans la connaissance de la nature mécanique sont presque uniquement conditionnés par l'exactitude de la construction qui est devenue possible par l'invention de l'analyse infinitésimale ~~et~~ par ~~les~~ concepts fondamentaux simples ~~(?)~~ découverts par Archimède, Galilée et Newton, dont se sert ~~aujour~~ la physique ~~moderne~~ d'aujourd'hui contemporaine. Mais dans les sciences ~~de la nature~~, où les concepts fondamentaux simples manquent jusqu'ici pour de telles constructions, on poursuit les phénomènes dans le «spatialement petit» autant que le microscope le permet, pour connaître l'enchaînement causal. Les questions touchant les rapports métriques de l'espace dans l'infiniment petit n'appartiennent donc pas aux superflus.

Si l'on suppose que les corps existent indépendamment du lieu, la courbure est partout constante, et alors il résulte des mesures astronomiques qu'elle ne peut être différente de zéro; en tout cas il faudrait que sa valeur réciproque fût une surface ~~en comparaison de~~ devant laquelle devrait s'évanouir le domaine accessible à nos télescopes. Mais si les corps ne sont pas indépendants du lieu, on ne peut pas conclure des rapports métriques en grand à ceux de l'infiniment petit; alors la courbure en chaque point peut avoir dans trois directions une valeur arbitraire, pourvu que la courbure totale de chaque partie mesurable de l'espace ne soit pas sensiblement différente de zéro; des rapports [encore plus compliqués] peuvent avoir lieu, si l'on ne peut, ~~conformément à l'hypothèse~~ comme on l'a supposé, représenter un élément linéaire par la racine carrée d'une expression différentielle du second degré. Mais alors les concepts empiriques sur lesquels ~~ont~~ sont fondées les ~~rapports~~ déterminations métriques de l'espace, le concept du corps solide et du rayon lumineux, ~~semblent~~ paraissent perdre leur valeur dans l'infiniment petit;



on peut donc fort bien penser * que les rapports métriques de l'espace dans l'infiniment petit ne sont pas conformes aux hypothèses de la géométrie; et il faudrait ~~en effet~~ ~~en fait~~ l'admettre en fait, dès que les phénomènes pourraient s'expliquer par là d'une manière plus simple.

La question de la valeur des hypothèses de la géométrie dans l'infiniment petit est liée à la question du principe interne des rapports métriques de l'espace. Dans cette question, qui peut bien être mise encore au compte* de la science de l'espace, ~~s'applique~~ la remarque précédente, trouve son application, à savoir que dans une multiplicité discrète le principe des rapports métriques est déjà contenu dans le concept de cette multiplicité, mais que dans une multiplicité continue il doit provenir d'ailleurs. Il faut donc, ou bien que la réalité qui ~~fait~~ ~~au~~ est fondement de l'espace forme une multiplicité discrète, ou bien que le principe des rapports métriques soit cherché ~~dans~~ au dehors, ~~dans~~ en des forces de liaison qui agissent sur lui.

La solution de ces questions ne peut être trouvée qu'en partant de la conception des phénomènes confirmée jusqu'ici par l'expérience, ~~à laquelle~~ dont Newton a ~~fourni~~ posé les bases, et en la remaniant progressivement sous l'~~empl~~ impulsion des faits qui ne se laissent pas expliquer par ~~son moyen~~ elle; de telles recherches, qui partent de concepts généraux comme celle qu'on a exposé ici, ne peuvent servir qu'à empêcher que ce travail ne soit entravé par la restriction des concepts, et que le progrès de la connaissance de l'enchaînement des choses ne soit arrêté par des préjugés traditionnels.

Ceci conduit dans le domaine d'une autre science, la physique, ~~que ne permet pas~~ ~~de ne pas entrer dans~~ ~~où ne nous permet pas d'~~ ~~dit~~ où la nature de la présente occasion ne nous permet guère d'entrer.

~~Table~~ Sommaire

Plan de la recherche

I. Concept d'une grandeur n fois étendue (1)

§1. Multiplicités continues et discrètes. Des parties déterminées d'une multiplicité s'appellent Quanta. Division de la science des grandeurs continues en :

1° Science des purs rapports de domaine, où l'on ne suppose pas les grandeurs indépendantes du lieu ;

2° Science des rapports de mesure, où il faut supposer les grandeurs indépendantes du lieu

§2. Génération du concept d'une multiplicité, ~~simplement~~ une fois, deux fois, ~~doublement~~ ..... n fois étendue

§3. Réduction de la détermination de lieu dans une multiplicité donnée à des déterminations de quantité. Caractère essentiel d'une multiplicité n fois étendue

II. Rapports métriques dont est capable une multiplicité de n dimensions (2) sous l'hypothèse que les lignes possèdent une longueur indépendante de la position, de sorte que toutes les lignes ~~sont~~ ~~mesur~~ables les unes par les autres

§1. Expression de l'élément linéaire. Sont considérées comme planes les multiplicités où l'élément linéaire peut s'exprimer par la racine d'une somme de carrés de différentielles totales –

(2) La recherche des déterminations de mesure possibles d'une multiplicité n fois étendue est très-incomplète, mais suffisante pour le but présent.

(1) L'art. I forme en même temps la préface des Contributions à l'analyse du lieu (Beiträge zur Analysis situs. [cf ~~XXIX~~, fragment de l'Analysis situs.]



§2. Recherche des multiplicités n fois étendues, où l'élément linéaire peut s'exprimer par la racine carrée d'une expression différentielle du second degré. Mesure de leur ~~éloignement~~ écartement de la planéité (courbure) en un point donné et dans une direction superficielle donnée. Pour déterminer leurs rapports métriques, il faut et il suffit (sous certaines restrictions) que la courbure soit donnée arbitrairement en chaque point pour $n\frac{n-1}{2}$ directions superficielles —

§3. Eclaircissement géométrique —

§4. Les multiplicités planes (où la courbure est partout égale à 0) peuvent être considérées comme un cas particulier des multiplicités à courbure constante. Celles-ci peuvent aussi être définies par ce fait qu'elles admettent l'indépendance des grandeurs n fois étendues par rapport au lieu (leur déplacement sans extension) —

§5. Surfaces à courbure constante —

III. Application à l'espace —

§1. Système des faits qui suffisent à déterminer les rapports métriques de l'espace tels que les suppose la géométrie —

§2. Jusqu'où est ~~vraisemblable~~ probable la valeur de ces déterminations empiriques au delà des bornes de l'observation dans l'infiniment grand? —

§3. Jusqu'où dans l'infiniment petit? Rapport de cette question avec ~~la~~ l'explication de la nature (1) —

(1). Le §3 de l'art. III a encore besoin ~~d'être~~ de remaniements et de plus amples développements.

(Notes de Riemann)

XXII. Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Illustrissima Academia Parisiensi propositae

..... L'expression: $\sqrt{\sum b_{\iota\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}}$ peut être regardée comme l'élément linéaire dans un espace général à n dimensions dépassant notre intuition. Si dans cet espace à partir du point $(s_1\, s_2 \ldots\ldots s_n)$ on mène toutes les lignes géodésiques* dans les éléments initiaux desquels les variations des s soient proportionnelles à: $\alpha ds_1 + \beta \delta s_1$, $\alpha ds_2 + \beta \delta s_2$, ... $\alpha ds_n + \beta \delta s_n$, α et β désignant des quantités quelconques, ces lignes formeront une surface qu'on pourra développer dans l'espace vulgaire soumis à notre intuition. Dans ce cas la mesure de la courbure de cette surface au point $(s_1, s_2, \ldots s_n)$ sera:

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\sum(\iota\iota',\iota''\iota''')(ds_\iota\,\delta s_{\iota'} - ds_{\iota'}\,\delta s_\iota)(ds_{\iota''}\,\delta s_{\iota'''} - ds_{\iota'''}\,\delta s_{\iota''})}{\sum b_{\iota,\iota'}\,ds_\iota\,ds_{\iota'}\sum b_{\iota,\iota'}\,\delta s_\iota\,\delta s_{\iota'} - \left(\sum b_{\iota,\iota'}\,ds_\iota\,\delta s_{\iota'}\right)^2}$$

où: $$(\iota\iota',\iota''\iota''') = \frac{\partial^2 b_{\iota,\iota''}}{\partial s_{\iota'}\,\partial s_{\iota'''}} + \frac{\partial^2 b_{\iota',\iota'''}}{\partial s_\iota\,\partial s_{\iota''}} - \frac{\partial^2 b_{\iota,\iota'''}}{\partial s_{\iota'}\,\partial s_{\iota''}} - \frac{\partial^2 b_{\iota',\iota''}}{\partial s_\iota\,\partial s_{\iota'''}}$$



Note de Heinrich Weber (d'après Dedekind)

Soit le carré de l'élément linéaire dans l'espace à n dimensions :

$$ds^2 = \sum_{\iota\iota'} b_{\iota\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}$$

On a alors pour déterminer les lignes géodésiques les éq. différentielles

$$(1) \qquad d\sum_{\iota} b_{\iota\mu} \frac{ds_\iota}{dr} = \frac{1}{2} dr \sum_{\iota\iota'} \frac{\partial b_{\iota\iota'}}{\partial s_\mu} \frac{ds_\iota}{dr} \frac{ds_{\iota'}}{dr}$$

et :

$$\sum_{\iota\iota'} b_{\iota\iota'} \frac{ds_\iota}{dr} \frac{ds_{\iota'}}{dr} = 1$$

quand :

$$r = \int \sqrt{\sum_{\iota\iota'} b_{\iota\iota'}\, ds_\iota\, ds_{\iota'}}$$

désigne la longueur de la ligne géodésique elle-même depuis un point fixe arbitraire O jusqu'à un point variable.

Soit le point O celui au voisinage duquel on cherche comment se comporte l'espace à n dimensions. Qu'on conçoive des lignes géodésiques menées à partir de ce point dans toutes les directions et qu'on introduise un système de nouvelles variables au moyen de la substitution : $x_1 = rc_1, \quad x_2 = rc_2, \ldots\ldots \quad x_n = rc_n$

où les grandeurs c ont la signification : $c_\iota = \left(\frac{ds_\iota}{dr}\right)_0$

de sorte qu'entre elles ~~a~~ lieu la relation :

$$\sum_{\iota\iota'} b^0_{\iota\iota'}\, c_\iota\, c_{\iota'} = 1$$

et qu'elles sont constantes le long de chaque ligne géodésique issue du point O. Les c apparaissent comme constantes d'intégration des éq. diff. (1), et pour représenter les variables x comme fonctions des

variables primitives s, il faut naturellement supposer que ces équations différentielles sont complètement intégrées.

La caractéristique de ces nouvelles variables, qu'on peut nommer « coordonnées centrales d'un point variable m rapporté au point O », consiste en ce qu'elles s'évanouissent au point O, et que leurs valeurs, quand on avance le long d'une ligne géodésique, croissent proportionnellement à la longueur de cette ligne. Ces propriétés se conservent, quand on introduit, au lieu des $x_1\ x_2 \dots x_n$, un système de n fonctions homogènes linéaires à coefficients constants de ces variables, indépendantes les unes des autres. Par là on peut obtenir, comme le demande Riemann ds. son Mém. sur les Hyp. de la Géom. (II, 2) :

$$r^2 = \sum x^2$$

......

Soit maintenant le carré de l'élément linéaire exprimé en nouvelles variables :

$$ds^2 = \sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'}$$

il s'ensuit que, quand on s'avance le long d'une ligne géodésique issue du point O, de sorte que $ds^2 = dr^2$, on a :

$$(2) \qquad \sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'}\, c_\iota\, c_{\iota'} = \sum_{\iota\iota'} a^0_{\iota\iota'}\, c_\iota\, c_{\iota'} = 1$$

Si l'on exprime les éq. diff. des lignes géodésiques en nouvelles variables, on obtient pour les lignes géod. issues du p. O :

$$d \sum_\iota a_{\mu\iota}\, c_\iota = \frac{1}{2}\, dr \sum_{\iota\iota'} \frac{\partial a_{\iota\iota'}}{\partial x_\mu}\, c_\iota\, c_{\iota'}$$

d'où suit :

$$\sum_{\iota\iota'} p_{\mu\iota\iota'}\, x_\iota\, x_{\iota'} = 0 \qquad (3)$$

en posant, pour abréger : $p_{\mu\iota\iota'} = \dfrac{\partial a_{\iota\mu}}{\partial x_{\iota'}} + \dfrac{\partial a_{\iota'\mu}}{\partial x_\iota} - \dfrac{\partial a_{\iota\iota'}}{\partial x_\mu}$

L'éq. (3) peut aussi s'écrire :

$$\sum_{\iota\iota'} \frac{\partial a_{\iota\iota'}}{\partial x_\mu}\, x_\iota\, x_{\iota'} = 2 \sum_{\iota\iota'} \frac{\partial a_{\iota\mu}}{\partial x_{\iota'}}\, x_\iota\, x_{\iota'} \qquad (3')$$



Posons, pour abréger :

$$\omega_\mu = \sum_\iota a_{\mu\iota} x_\iota \qquad \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\nu} = a_{\mu\nu} + \sum_\iota \frac{\partial a_{\mu\iota}}{\partial x_\nu} x_\iota$$

l'éq. (3') peut s'écrire :

$$\omega_\mu + \sum_\iota \frac{\partial \omega_\iota}{\partial x_\mu} x_\iota = 2 \sum_\iota \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\iota} x_\iota .$$

Si l'on pose ensuite :

$$2\omega = \sum_\iota \omega_\iota x_\iota \qquad 2\frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} = \omega_\mu + \sum \frac{\partial \omega_\iota}{\partial x_\mu} x_\iota$$

il s'en suit :

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_\mu} = \sum_\iota \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\iota} x_\iota \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\nu} + \sum_\iota \frac{\partial^2 \omega_\mu}{\partial x_\iota \partial x_\nu} x_\iota$$

~~d'où~~ et par suite : $\frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x_\mu} + \sum_\iota \frac{\partial}{\partial x_\iota}\left(\frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x_\mu}\right) x_\iota = 0$

d'où il résulte que les fonctions homogènes $\left(\frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x_\mu}\right)$ sont de l'ordre (-1). Désignons une telle fonction par $f(x_1 x_2 \dots x_n)$, on a ainsi :

$$f(tx_1, tx_2, \dots tx_n) = t^{-1} f(x_1 x_2 \dots\dots x_n)$$

Si l'on suppose que les coefficients <u>a</u> et leurs dérivées ont au point O des valeurs finies et déterminées, il suit que, si l'on pose $t=0$, la fonction f doit s'annuler identiq^t, c.à.d. que

$$\frac{\partial \omega_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \omega_\nu}{\partial x_\mu}$$

On a donc aussi : $\sum_\iota \frac{\partial a_{\mu\iota}}{\partial x_\nu} x_\iota = \sum_\iota \frac{\partial a_{\nu\iota}}{\partial x_\mu} x_\iota$

d'où l'on tire au moyen de (3') :

$$\sum_{\iota\iota'} \frac{\partial a_{\mu\iota}}{\partial x_{\iota'}} x_\iota x_{\iota'} = \sum_{\iota\iota'} \frac{\partial a_{\iota\iota'}}{\partial x_\mu} x_\iota x_{\iota'} = 0$$

et en intégrant les éq. diff. des lignes géodésiques:

$$\sum_i a_{\mu i} c_i = \sum_i a^0_{\mu i} c_i$$

ou, en multipliant par r:

$$\sum_i a_{\mu i} x_i = \sum_i a^0_{\mu i} x_i$$

Toutes ces ~~équations~~ égalités sont ~~identiques~~ des identités c.à.d valent pour tout système de valeurs des variables indépendantes x.

Si maintenant $t_{ii'} = t_{i'i}$ désignent n'importe quelles fonctions de $x_1 x_2 \dots x_n$, qui ont, ainsi que leurs dérivées jusqu'au 3e ordre inclusivement des valeurs finies et déterminées au point O, et si l'on a l'identité: $\sum_{ii'} t_{ii'} x_i x_{i'} = 0$

il s'en suit, en différentiant trois fois, et en faisant ensuite $x_i = 0$, les ~~équations~~ égalités valables pour le point O:

$$t_{ii'} = 0 \qquad \frac{\partial t_{ii'}}{\partial x_{i''}} + \frac{\partial t_{i'i''}}{\partial x_i} + \frac{\partial t_{i''i}}{\partial x_{i'}} = 0$$

Si l'on substitue ici $p_{ii'}$ à $t_{ii'}$, on obtient pour le p. O:

$$p_{ii'i''} = 0 \qquad \frac{\partial p_{ii'i''}}{\partial x_{i'''}} + \frac{\partial p_{ii''i'''}}{\partial x_{i'}} + \frac{\partial p_{ii'i'''}}{\partial x_{i''}} = 0 .$$

De la première de ces égalités, on ~~obtient~~ tire en ajoutant $p_{i'ii''} = 0$,

$$(5) \qquad \frac{\partial a_{ii'}}{\partial x_{i''}} = 0 \qquad \text{au point O}$$

et de la seconde:

$$2\left(\frac{\partial^2 a_{ii'}}{\partial x_{i''}\partial x_{i'''}} + \frac{\partial^2 a_{ii''}}{\partial x_{i'''}\partial x_{i'}} + \frac{\partial^2 a_{ii'''}}{\partial x_{i'}\partial x_{i''}}\right) = \frac{\partial^2 a_{i''i'''}}{\partial x_i \partial x_{i'}} + \frac{\partial^2 a_{i'''i'}}{\partial x_i \partial x_{i''}} + \frac{\partial^2 a_{i'i''}}{\partial x_i \partial x_{i'''}}$$

Si l'on permute i et i', qu'on ajoute et qu'on désigne par S la somme des 6 dérivées de la forme $\frac{\partial^2 a_{ii'}}{\partial x_{i''}\partial x_{i'''}}$, il vient:



$$S = 3\left(\frac{\partial^2 a_{i''i'''}}{\partial x_i \partial x_{i'}} - \frac{\partial a_{ii'}}{\partial x_{i''} \partial x_{i'''}}\right)$$

et comme S ne change pas quand on permute i'', i''' avec i, i' :

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 a_{i''i'''}}{\partial x_i \partial x_{i'}} = \frac{\partial^2 a_{ii'}}{\partial x_{i''} \partial x_{i'''}}$$

$$(7) \quad \frac{\partial^2 a_{ii'}}{\partial x_{i''} \partial x_{i'''}} + \frac{\partial^2 a_{ii''}}{\partial x_{i'''} \partial x_{i'}} + \frac{\partial^2 a_{ii'''}}{\partial x_{i'} \partial x_{i''}} = \frac{\partial^2 a_{i''i'''}}{\partial x_i \partial x_{i'}} + \frac{\partial^2 a_{i'''i'}}{\partial x_i \partial x_{i''}} + \frac{\partial^2 a_{i'i''}}{\partial x_i \partial x_{i'''}} = 0$$

au point O. — Nous entendrons désormais par

$$a_{ii'}, \quad \frac{\partial a_{ii'}}{\partial x_{i''}}, \quad \frac{\partial^2 a_{ii'}}{\partial x_{i''} \partial x_{i'''}}$$

les valeurs de ces grandeurs au point O. Dans cette hypothèse, nous avons pour un élément linéaire ds_0 issu du point O :

$$ds_0^2 = \sum_{ii'} a_{ii'}\, dx_i\, dx_{i'}$$

et pour un élément linéaire $\underline{ds}$ issu d'un point infiniment voisin de coordonnées (infiniment petites) $x_1\, x_2 \ldots x_n$, jusqu'aux termes de 2e ordre inclusivement :

$$ds^2 = \sum_{ii'} a_{ii'}\, dx_i\, dx_{i'} + \sum_{ii'i''} \frac{\partial a_{ii'}}{\partial x_{i''}} x_{i''}\, dx_i\, dx_{i'}$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{ii'i''i'''} \frac{\partial^2 a_{ii'}}{\partial x_{i''} \partial x_{i'''}} x_{i''}\, x_{i'''}\, dx_i\, dx_{i'}$$

Le second terme disparaît en vertu de (5), et le troisième :

$$\Theta = \frac{1}{2} \sum_{ii'i''i'''} \frac{\partial^2 a_{ii'}}{\partial x_{i''} \partial x_{i'''}} x_{i''}\, x_{i'''}\, dx_i\, dx_{i'}$$

est l'expression de la quantité dont l'espace proposé à n dimensions s'écarte de la planité dans la direction superficielle déterminée par

les x et les dx ; car à l'aide de (6) et (7) on peut leur donner une forme d'où il est visible qu'il ne dépend que des combinaisons :

$(x_\iota dx_{\iota'} - x_{\iota'} dx_\iota)$

~~En effet,~~ Qu'on écrive en effet Θ, par la permutation des indices, sous les quatre formes suivantes :

$$\Theta = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 a_{\iota\iota'}}{\partial x_{\iota''} \partial x_{\iota'''}} x_{\iota''} x_{\iota'''} dx_\iota dx_{\iota'} \qquad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 a_{\iota'\iota''}}{\partial x_{\iota} \partial x_{\iota'''}} x_{\iota} x_{\iota'''} dx_{\iota'} dx_{\iota''} \qquad (2)$$

$$= \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 a_{\iota''\iota'''}}{\partial x_{\iota} \partial x_{\iota'}} x_{\iota} x_{\iota'} dx_{\iota''} dx_{\iota'''} \qquad (4)$$

$$= \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 a_{\iota\iota'''}}{\partial x_{\iota'} \partial x_{\iota''}} x_{\iota'} x_{\iota''} dx_{\iota} dx_{\iota'''} \qquad (3)$$

Appliquons (6) à la ~~troisième~~ 4e de ces expressions, et (6) et (7) à la deuxième et à la ~~quatrième~~ 3e, ce qui donne en permutant encore une fois les indices :

$$\Theta = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 a_{\iota\iota'}}{\partial x_{\iota''} \partial x_{\iota'''}} x_{\iota''} x_{\iota'''} dx_\iota dx_{\iota'}$$

$$\frac{1}{2}\Theta = -\frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 a_{\iota\iota'}}{\partial x_{\iota''} \partial x_{\iota'''}} x_{\iota} x_{\iota'''} dx_{\iota'} dx_{\iota''}$$

$$\frac{1}{2}\Theta = -\frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 a_{\iota\iota'}}{\partial x_{\iota''} \partial x_{\iota'''}} x_{\iota'} x_{\iota''} dx_{\iota} dx_{\iota'''}$$

$$\Theta = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 a_{\iota\iota'}}{\partial x_{\iota''} \partial x_{\iota'''}} x_{\iota} x_{\iota'} dx_{\iota''} dx_{\iota'''}$$

En ajoutant ces 4 égalités, il vient :

$$(8) \quad \Theta = \frac{1}{6} \sum_{\iota,\iota'';\iota',\iota'''} \frac{\partial^2 a_{\iota\iota'}}{\partial x_{\iota''} \partial x_{\iota'''}} \left(x_\iota dx_{\iota''} - x_{\iota''} dx_\iota\right)\left(x_{\iota'} dx_{\iota'''} - x_{\iota'''} dx_{\iota'}\right)$$



Mais cette expression de Θ n'a été déduite que dans l'hypothèse que les variables $\underline{x}$ avaient la signification particulière de coordonnées centrales. Maintenant il s'agit de la transformer en coordonnées arbitraires. On y arrive, d'après l'indication de Riemann, en la mettant sous une forme qui est visiblement indépendante des variables employées.

Nous mettons d'abord, en conservant les coordonnées centrales, à la place des coordonnées infiniment petites $x_1\, x_2 \ldots x_n$ les différentielles $\delta x_1\, \delta x_2 \ldots \delta x_n$ qui leur sont proportionnelles, de sorte que:

$$(9) \qquad \Theta = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 a_{\iota\iota'}}{\partial x_{\iota''} \partial x_{\iota'''}} dx_\iota\, dx_{\iota'}\, \delta x_{\iota''}\, \delta x_{\iota'''}$$

Nous choisissons les différentielles $\underline{dx}$ et $\underline{\delta x}$, ~~d'ailleurs~~ tout à fait arbitraires d'ailleurs, de cette manière que

$$(10) \qquad ddx = 0 \qquad d\delta x = 0 \qquad \delta dx = 0 \qquad \delta\delta x = 0$$

ce qu'on obtient par ex. en prenant $\underline{dx}$, $\underline{\delta x}$ constantes; il s'ensuit que l'on peut permuter $\underline{d}$ et $\underline{\delta}$, c.à.d. que pour toute fonction arbitraire du lieu φ on a:

$$(I) \qquad d\delta\varphi = \delta d\varphi.$$

Sous cette condition, on peut déduire de (5), (6), (7) la formule

$$dd \sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'}\, \delta x_\iota\, \delta x_{\iota'} = \delta\delta \sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'} = -2 d\delta \sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'}\, dx_\iota\, \delta x_{\iota'}$$

et ~~de~~ au moyen de celle-ci:

$$(II) \qquad \Theta = \frac{1}{2}\, dd \sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'}\, \delta x_\iota\, \delta x_{\iota'}$$

$$= \frac{1}{6}\left[dd \sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'}\, \delta x_\iota\, \delta x_{\iota'} - 2 d\delta \sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'}\, dx_\iota\, \delta x_{\iota'} + \delta\delta \sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'}\, dx_\iota\, dx_{\iota'} \right]$$

Si $\underline{\delta'}$ désigne une variation arbitraire, mais permutable avec $\underline{d}$ et $\underline{\delta}$, on tire de (5) et de (10) les égalités ~~équations~~:

$$\delta' \sum_{ii'} a_{ii'}\, dx_i\, \delta x_{i'} = \sum_{ii'} a_{ii'}\, d\delta' x_i\, \delta x_{i'} + \sum_{ii'} a_{ii'}\, dx_i\, \delta\delta' x_{i'}$$

$$d \sum_{ii'} a_{ii'}\, \delta' x_i\, \delta x_{i'} = \sum_{ii'} a_{ii'}\, d\delta' x_i\, \delta x_{i'}$$

$$\delta \sum_{ii'} a_{ii'}\, dx_i\, \delta' x_{i'} = \sum_{ii'} a_{ii'}\, dx_i\, \delta\delta' x_{i'}$$

D'où il suit :

(III) $$\delta' \sum_{ii'} a_{ii'}\, dx_i\, \delta x_{i'} - d \sum_{ii'} a_{ii'}\, \delta' x_i\, \delta x_{i'} - \delta \sum_{ii'} a_{ii'}\, dx_i\, \delta' x_{i'} = 0$$

et si l'on fait $d = \delta$:

(IV) $$\delta' \sum_{ii'} a_{ii'}\, dx_i\, dx_{i'} - 2d \sum_{ii'} a_{ii'}\, dx_i\, \delta' x_{i'} = 0$$

(V) $$\delta' \sum_{ii'} a_{ii'}\, \delta x_i\, \delta x_{i'} - 2\delta \sum_{ii'} a_{ii'}\, \delta x_i\, \delta' x_{i'} = 0$$

Si maintenant on substitue aux variables $\underline{x}$ d'autres variables $\underline{s}$ qui soient fonctions des premières, on ~~obtient~~ a pour des différentielles $\underline{d}$, $\underline{\delta}$ tout à fait arbitraires la transformation :

$$\sum_{ii'} a_{ii'}\, dx_i\, \delta x_{i'} = \sum_{ii'} b_{ii'}\, ds_i\, \delta s_{i'}$$

et l'on obtient ainsi l'expression transformée de Θ, en substituant dans (II) $\underline{b_{ii'}}$, s_i à $\underline{a_{ii'}}$, x_i, ou, en d'autres termes, en entendant par x_i dans (II) non plus des coordonnées centrales mais des coordonnées arbitraires. Sans doute les conditions (5), (6), (7), (10) ne seront plus alors valables, mais les conditions (I), (III), (IV), (V) seront ~~satisfaites~~ pour tous les systèmes de coordonnées, si elles le sont pour un seul, par ex. celui des coordonnées centrales. Donc, si, en continuant à transformer (II) nous ne faisons usage que des relations (I), (III), (IV), (V), les résultats seront valables pour des



variables arbitraires. Désormais le calcul, quoique un peu long, ne présente plus de difficultés. Si l'on calcule le second membre de (II), les différentielles du 3e ordre disparaissent seules par la permutation des différentielles. On peut ~~faire~~ chasser les différentielles de 2e ordre à l'aide des égalités suivantes qui résultent de (III), (IV), (V):

$$2\sum_{\iota} a_{\iota\iota'}\, ddx_{\iota} = -\sum_{\iota\iota'} p_{\nu\iota\iota'}\, dx_{\iota}\, dx_{\iota'}$$

$$2\sum_{\iota} a_{\iota\iota'}\, d\delta x_{\iota} = -\sum_{\iota\iota'} p_{\nu\iota\iota'}\, dx_{\iota}\, \delta x_{\iota'}$$

$$2\sum_{\iota} a_{\iota\iota'}\, \delta\delta x_{\iota} = -\sum_{\iota\iota'} p_{\nu\iota\iota'}\, \delta x_{\iota}\, \delta x_{\iota'}$$

où:

$$p_{\nu\iota\iota'} = \frac{\partial a_{\nu\iota}}{\partial x_{\iota'}} + \frac{\partial a_{\nu\iota'}}{\partial x_{\iota}} - \frac{\partial a_{\iota\iota'}}{\partial x_{\nu}}$$

On obtient ainsi l'expression:

$$dd\sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'}\, \delta x_{\iota}\, \delta x_{\iota'} - 2d\delta\sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'}\, dx_{\iota}\, \delta x_{\iota'} + \delta\delta\sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'}\, dx_{\iota}\, dx_{\iota'}$$

$$= \sum_{\iota\iota',\iota''\iota'''} (\iota\iota', \iota''\iota''')(dx_{\iota}\,\delta x_{\iota'} - \delta x_{\iota}\, dx_{\iota'})(dx_{\iota''}\,\delta x_{\iota'''} - \delta x_{\iota''}\, dx_{\iota'''})$$

où $(\iota\iota', \iota''\iota''')$ a la même signification que dans le texte de Riemann; la somme doit être prise de telle sorte que de deux couples d'indices ι, ι' et ι', ι, et de même de deux couples ι'', ι''' et ι''', ι'' on n'en conserve qu'un.

~~De~~ Cette expression nous fournit maintenant la courbure de notre espace général. Soient en effet:

$$ds = \sqrt{\sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'}\, dx_{\iota}\, dx_{\iota'}}\ , \quad \delta s = \sqrt{\sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'}\, \delta x_{\iota}\, \delta x_{\iota'}}$$

deux éléments linéaires de cet espace, et:

$$\frac{\sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'}\, dx_{\iota}\, \delta x_{\iota'}}{ds\, \delta s} = \cos\theta$$

le cosinus de l'angle qu'ils comprennent. L'aire du triangle infiniment petit qu'ils forment est alors :

$$\Delta = \frac{1}{2} ds\, \delta s \sin\theta$$

et il vient :

$$4\Delta^2 = \sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'} dx_\iota dx_{\iota'} \sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'} \delta x_\iota \delta x_{\iota'} - \left(\sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'} dx_\iota \delta x_{\iota'}\right)^2$$

$$= \sum_{\iota\iota',\iota''\iota'''} \left(a_{\iota\iota''} a_{\iota'\iota'''} - a_{\iota'\iota''} a_{\iota\iota'''}\right)\left(dx_\iota \delta x_{\iota'} - \delta x_\iota dx_{\iota'}\right)\left(dx_{\iota''} \delta x_{\iota'''} - \delta x_{\iota''} dx_{\iota'''}\right)$$

$$-\frac{3}{8} \frac{dd \sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'} dx_\iota dx_{\iota'}}{\Delta^2}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{dd \sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'} \delta x_\iota \delta x_{\iota'} - 2d\delta \sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'} dx_\iota \delta x_{\iota'} + \delta\delta \sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'} dx_\iota dx_{\iota'}}{\sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'} dx_\iota dx_{\iota'} \sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'} \delta x_\iota \delta x_{\iota'} - \left(\sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'} dx_\iota \delta x_{\iota'}\right)^2}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\sum_{\iota\iota',\iota''\iota'''} (\iota\iota', \iota''\iota''')\left(dx_\iota \delta x_{\iota'} - \delta x_\iota dx_{\iota'}\right)\left(dx_{\iota''} \delta x_{\iota'''} - \delta x_{\iota''} dx_{\iota'''}\right)}{\sum_{\iota\iota',\iota''\iota'''} \left(a_{\iota\iota''} a_{\iota'\iota'''} - a_{\iota\iota'''} a_{\iota'\iota''}\right)\left(dx_\iota \delta x_{\iota'} - \delta x_\iota dx_{\iota'}\right)\left(dx_{\iota''} \delta x_{\iota'''} - \delta x_{\iota''} dx_{\iota'''}\right)}$$

Il faut encore montrer, à présent, que cette expression coïncide avec celle que Gauss a donnée pour la courbure d'une surface, quand on considère une surface formée par de semblables lignes géodésiques dans les éléments initiaux desquels les variations des x sont proportionnelles à : $\alpha dx_1 + \beta \delta x_1, \quad \alpha dx_2 + \beta \delta x_2, \quad \ldots\ldots \quad \alpha dx_n + \beta \delta x_n$

où α et β désignent des grandeurs arbitraires.

Nous posons comme plus haut : $x_\iota = r c_\iota$, de sorte que les c sont constants sur chaque ligne géodésique issue du point 0, ~~et que~~ r désignant la longueur de cette ligne géodésique jusqu'à un point indéterminé. Alors on a, comme ci-dessus :

$$\sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'} c_\iota c_{\iota'} = \sum_{\iota\iota'} a^0_{\iota\iota'} c_\iota c_{\iota'} = 1.$$



Si maintenant nous posons ~~[illegible]~~ deux systèmes fixes de grandeurs c_i soit c_i^0 et c_i', et que nous considérions un système variable :

(11) $$c_i = \alpha c_i^0 + \beta c_i'$$

nous avons ~~par suite~~ ensuite :

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta\cos(r^0, r') + \beta^2 = 1$$

~~et~~ par où les grandeurs c_i deviennent fonctions d'une seule variable, pour laquelle nous pouvons prendre l'angle φ, que forme l'élément initial de r avec l'élément initial de r^0, et qui est donné par l'expression :

$$\cos\varphi = \sum_{ii'} a_{ii'}^0\, c_i\, c_{i'}^0 \, .$$

Si l'on fait maintenant varier les grandeurs r, c_i, et les grandeurs infiniment petites dr, dc_i, qui satisfont ~~à la condition~~ :

$$\sum_{ii'} a_{ii'}^0\, c_i\, dc_{i'} = 0$$

on obtient à l'aide des égalités (4) :

(12) $$\sum_{ii'} a_{ii'}\, c_i\, dc_{i'} = \sum_{ii'} a_{ii'}^0\, c_i\, dc_{i'} = 0$$

De plus nous avons : $$dx_i = r\,dc_i + c_i\,dr$$

donc $$ds^2 = \sum_{ii'} a_{ii'}\, dx_i\, dx_{i'} = dr^2 + r^2 \sum_{ii'} a_{ii'}\, dc_i\, dc_{i'} = dr^2 + r^2 \mu\, d\varphi^2$$

en posant pour abréger : $$\sum_{ii'} a_{ii'}\, dc_i\, dc_{i'} = \mu\, d\varphi^2$$

Or nous avons :

(13) $$\cos\varphi = \sum_{ii'} a_{ii'}^0\, c_i\, c_{i'}^0 \quad , \quad -\sin\varphi\, d\varphi = \sum_{ii'} a_{ii'}^0\, c_i^0\, dc_{i'} \; ,$$

et de (11) résulte une expression de la forme :

$$dc_i = a c_i^0 + b c_i' \; ; \quad a = \beta d\alpha - \alpha d\beta, \qquad b = d\beta \, ,$$

~~donc~~ par suite, de (12) et (13) :

$$-\sin\varphi\, d\varphi = a + b\cos\varphi \qquad 0 = a\cos\varphi + b \, .$$

D'où, en éliminant a et b :

$$\sin\varphi\, dc_\iota = d\varphi\,(c_\iota \cos\varphi - c_\iota^\circ)$$

Il en résulte ensuite : $d\varphi^2 = \sum_{\iota\iota'} a^\circ_{\iota\iota'}\, dc_\iota\, dc_{\iota'}$

et par conséquent :

$$(14) \qquad \mu = \frac{\sum_{\iota\iota'} a_{\iota\iota'}\, dc_\iota\, dc_{\iota'}}{\sum_{\iota\iota'} a^\circ_{\iota\iota'}\, dc_\iota\, dc_{\iota'}}$$

Désignons cette expression par : $\frac{m^2}{r^2}$; nous obtenons la forme que Gauss a donnée à l'élément linéaire d'une surface quelconque, savoir :

$$ds^2 = dr^2 + m^2 d\varphi^2$$

(Disquisitiones generales circa superficies curvas, art. 19)

et l'on obtient pour la courbure : $k = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}$

Si maintenant la courbure de la surface est continue au point $r = 0$, on a en ce point :

$$m = 0, \qquad \frac{\partial m}{\partial r} = 1, \qquad \frac{\partial^2 m}{\partial r^2} = 0$$

et par suite : $k = -\frac{\partial^3 m}{\partial r^3}$.

On obtient donc pour la fonction μ au même point :

$$\mu = 1, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial r} = 0, \qquad k = -\frac{3}{2}\frac{\partial^2 \mu}{\partial r^2}$$

Les deux premières égalités sont satisfaites par suite de (14), (5) ; de la troisième on tire :

$$k = -\frac{3}{2}\,\frac{\sum_{\iota\iota',\iota''\iota'''} \left(\frac{\partial^2 a_{\iota\iota'}}{\partial x_{\iota''}\,\partial x_{\iota'''}}\right)_0 c_{\iota''}\, c_{\iota'''}\, dc_\iota\, dc_{\iota'}}{\sum_{\iota\iota'} a^\circ_{\iota\iota'}\, dc_\iota\, dc_{\iota'}}$$

ce qui s'accorde avec l'expression trouvée plus haut.



Si l'on construit les lignes géodésiques issues du point O dont les directions initiales sont déterminées par les égalités (11), on obtient une surface dans l'espace transcendant. Les coordonnées d'un point de cette surface peuvent s'exprimer par deux variables indépendantes et si on désigne celles-ci par p, q, on obtient pour le carré de l'élément linéaire sur cette surface une expression de la forme :

$$ds^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2$$

où E, F, G sont fonctions de p et q. Si l'on prend pour x, y, z un système de solutions particulières des équations différentielles partielles simultanées :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2 = E$$

$$\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q} = F$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2 = G$$

on a :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

et si l'on considère x, y, z comme coordonnées d'un point de notre espace on obtient une surface sur laquelle, selon l'expression de Riemann, on peut développer la surface de l'espace transcendant, c.à d. ~~la~~ l'étendre point par point sans changer l'élément linéaire.

De ces formules on peut aisément déduire l'expression de l'élément linéaire dans l'hypothèse de la courbure constante. Si en effet k a la valeur constante α, on a : $m = \frac{\sin r\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}$

et si l'on ~~prend pour~~ introduit au lieu des c des combinaisons ~~telles~~ linéaires des c telles que : $\Sigma c_i^2 = 1$ et par suite : $d\varphi^2 = \Sigma dc_i^2$

on obtient :

$$ds^2 = dr^2 + \frac{\sin^2 r\sqrt{\alpha}}{\alpha}\Sigma dc_i^2$$

Si donc l'on pose (ce qui comprend comme cas particulier la projection stéréographique de la sphère sur le plan):

$$x_i = \frac{2c_i}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{tang} \frac{r\sqrt{\alpha}}{2}, \qquad \sum x_i^2 = \frac{4}{\alpha} \operatorname{tg}^2 \frac{r\sqrt{\alpha}}{2},$$

il suit:

$$\sum dx_i^2 = \frac{dr^2}{\cos^4 \frac{r\sqrt{\alpha}}{2}} + \frac{4}{\alpha} \operatorname{tg}^2 \frac{r\sqrt{\alpha}}{2} \cdot \sum dc_i^2$$

et:

$$ds = \cos^2 \frac{r\sqrt{\alpha}}{2} \cdot \sqrt{\sum dx_i^2} = \frac{\sqrt{\sum dx_i^2}}{1 + \frac{\alpha}{4} \sum x_i^2}$$



Géométrie non-euclidienne

Bibliographie -

Beltrami -

Helmholtz -

P. Tannery -

G. Lechalas -

A. de Broglie

Andrade

Poincaré -

Picard

Cayley -

Non-Euclidea



A

Bibliographie de la Géométrie non-euclidienne

J. Bolyaï : Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens
(1) trad par Houël (G. V. 1868) (Maros-Vasarhély, 1832.)
apud W. Bolyaï : Tentamen in elementa matheseos.
W. Bolyaï : Kurzer Grundriss eines Versuchs... (M-V. 1851.)

Lobatchewski : Géométrie imaginaire (J. de Crelle, XVII, 1837.)
(1) Etudes géométriques sur la théorie des parallèles (Berlin, 1840)
trad par Houël (Paris, Gauthier-Villars, 1866)
Pangéométrie (Kazan, 1855.)

Riemann : Sur les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie, ap. Abhandl. der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (2) (Bd. XIII.)
(leçon d'habilitation ~~1855~~, publiée après sa mort, 1867.)
(10 juin 1854 Œuvres complètes, 2e édition, Teubner 1892.

Helmholtz : Sur les faits qui servent de base à la géométrie (Heidelberg, 1868)
~~trad par Houël~~ Cf ~~ds~~ Mém. de la Soc. des sc. physiques et naturelles de Bordeaux, tome V. (1867)
V. Nachrichten von der königl. Gesellschaft der Wissensch. zu Göttingen (3 juin 1868.)
Les axiomes de la géométrie, ap. Revue des cours scientifiques (9 juillet 1870.) juin 1877-



(1) Mém. de la Soc des sc. phys. et nats de Bordeaux, tome V.
(2) trad. par Houel ap. Annali di Matematica pura ed applicata, 2e série, tome III.

B

Beltrami: Saggio di Interpretazione della Géom non Euclidea
trad. par Houël, Ann de l'É. N. S. VI, 1869. Naples, 1868.
Teoria fundamentale degli Spazj di curvatura costante (Ann di Matematiche, II, II, III, pp 232-255)
(trad par Houël, ibid.) (Milan, 1868. Francisco Zanetti)

Klein: Sur la géométrie non-euclidienne, Math Annalen 1871.
cf. Math. Annalen, tomes IV, VI, Luroth, VIII.
cf Bulletin des sciences math. et astr. II, 1871, p. 341 sqq.

Christoffel: Journal für reine und angew. Mathematik
Bd. LXX, p. 46. } Journal de Crelle, tomes
Lipschitz: ibid ——— p. 71. } 70, 71, 72 et 82.

M de Tilly: ap. Mém. de l'Acad. de Bordeaux, 1879.
——— Essai sur les princ fond de la géométrie (Bruxelles 1879.)

Houël: Essai critique sur les princ. fond de la Géom élémentaire
(Paris, Gauthier Villars 1867.)

Calinon: Etude sur la sphère, la ligne droite et le plan (Nancy, 1888.)
——— Cf. Revue philosophique, juin 1889, août 1890, oct. 1891.

Milhaud: Revue Philosophique tome XXV, p 622.

C. Jordan: Bulletin de la Société math. de France, t. III, p. 104.

l'abbé de Broglie: Annales de Philosophie chrétienne, avril 1890.

M. Poincaré: Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie, Bulletin de la Société math. de France t. XV (1887)

Delbœuf: Prolégomènes philosophiques de la géométrie. Liège, 1860.

c

Beltrami, Essai d'interprétation de la géométrie non-euclidienne (trad. Houel, dp. Annales de l'Ecole Normale Sup. tome VI, 1869.)

— Elément linéaire d'une surface à courbure négative const. $-\frac{1}{R^2}$:

$$ds^2 = R^2 \frac{(a^2-v^2)du^2 + 2uv\,du\,dv + (a^2-u^2)dv^2}{(a^2-u^2-v^2)^2}$$

Les lignes géodésiques de cette surface sont représentées par des ~~éq~~ relations linéaires entre $\underline{u}$ et $\underline{v}$. Les géodésiques $u=$ const. sont orthogonales à la géod. $v=0$, et les géod. $v=$ const. sont orthogonales à la géod. $u=0$. Les géod. fondamentales $u=0$, $v=0$ peuvent donc servir d'axes rectangulaires —

Faisons correspondre à la surface un plan par les formules:

$$x = u, \qquad y = v$$

Condition de réalité: $u^2+v^2 \leq a^2$.

Considérons le cercle plan: $x^2+y^2=a^2$

et cherchons la surface qui correspond à l'aire de ce cercle

En coord. polaires (ρ sur la surface, r sur le plan):

$$d\rho = R\frac{a\,dr}{a^2-r^2} \qquad \rho = \frac{R}{2}\log\frac{a+r}{a-r} = \frac{R}{2}\log\frac{a+\sqrt{u^2+v^2}}{a-\sqrt{u^2+v^2}} \ (1)$$

Au cercle de rayon $\underline{a}$ correspond la surface infinie; aux cercles de rayon $<a$, corresp. des cercles géodésiques de rayon fini. Les angles des rayons correspondants sont égaux —

Les géodésiques de la surface sont entièrement représentées par les cordes finies (limitées) du cercle de rayon $\underline{a}$. 2 points déterminent toujours une droite (une géodésique de la surface pseudosphérique)

Aux points de la circonf. corresp. les points à l'infini de la surface.

(1) $r = a\,\mathrm{th}\frac{\rho}{R}$ $\qquad \mathrm{ch}\frac{\rho}{R} = \frac{a}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}$ $\qquad \sqrt{u^2+v^2} = r.$



D)

Les parallèles de la surface corresp. aux cordes qui se coupent sur la circonf. leur angle est nul. Les 2 parallèles menées par un p. à une géodésique font un angle différent de 0 et de 180°.

Le demi-périmètre du cercle noneuclidien de rayon ρ est égal à :

$$\frac{1}{2}\pi R\left(e^{\frac{\rho}{R}} - e^{-\frac{\rho}{R}}\right)$$

$R = k$, paramètre de l'espace non-euclidien (Gauss)

(Pour les surfaces à courbure constante positive, R^2 et a^2 ont l'autre signe, de sorte que u, v n'ont plus de limite supérieure. On passe des unes aux autres en faisant R et $\underline{a}$ imaginaires)

– La surface pseudosphérique est superposable à elle-même et retournable. – La distance géodésique ρ de 2 p. (u, v) (u_0, v_0) est :

$$th^2 \frac{\rho}{R} = \frac{a^2[(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2] - (u_0 v - u v_0)^2}{(a^2 - u u_0 - v v_0)^2}$$

ou

$$ch \frac{\rho}{R} = \frac{a^2 - u u_0 - v v_0}{\sqrt{(a^2 - u^2 - v^2)(a^2 - u_0^2 - v_0^2)}}$$

On peut prendre un point qcq. pour origine et 2 géodésiques rectang qcq. pour axes fondamentaux.

Angle de parallélisme Δ : angle formé par chacune des 2 parallèles avec la normale issue du même point. $tg\Delta \, sh \frac{\delta}{R} = 1$

δ étant la distance géodésique du p. à la droite.

Formule de Lobatchefsky : $tg \frac{\Delta}{2} = e^{-\frac{\delta}{R}}$

Or les formules relatives aux tr. sphériques se changent en formules relatives aux tr. pseudosphériques qd on rend imaginaires les rapp des côtés au rayon, càd qd on change les fonct. circulaires en fonctions hyperboliques. On retrouve la trigonométrie de Lobatchefsky

Aire d'un triangle géodésique (pseudosphérique) : $R^2(\pi - A - B - C)$
Si dans un tr. de dim. finies, la somme des 3 angles était ~~2~~ π, on aurait : $R = \infty$, $\Delta = \frac{\pi}{2}$ (géom. euclidienne) et dans tout autre tr. la somme des angles serait π.
Aire du tr. formé par une ligne géodésique et ses 2 parallèles :
$$R^2(\pi - 2\Delta) = 2R^2 \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{sh}\frac{\delta}{R}\right)$$
Elle n'est infinie que pour $R = \infty$ (plan.)
— Autre forme de l'élément linéaire :
$$ds^2 = d\rho^2 + \left(R \operatorname{sh}\frac{\rho}{R}\right)^2 d\varphi^2$$
Pourtant on ne peut appliquer la pseudosphérique sur une surface de révolution (elle devrait avoir ~~les~~ sa courbure négative même sur l'axe)
La courbure d'une circ. géod. de rayon ρ est : $\dfrac{1}{R \operatorname{tgh}\frac{\rho}{R}}$ donc constante.
On ne peut pas toujours faire passer une circonf. réelle par 3 p. qcq. de la surface. A moins d'admettre des circonf. géod. à centre idéal ; celles-ci sont parallèles (équidistantes) à des lignes géodésiques (sur la sphère, toute circ. géod est parallèle à une ligne géodésique)
Les circ. géod dont le centre est à l'infini sont les horicycles de Lobatchefsky. Ils deviennent les parallèles de la surface de révolution engendrée par la ligne aux tangentes égales, sur laquelle la surface pseudosphérique peut s'enrouler une infinité de fois.

D

F

~~Justification~~ Réduction par Beltrami de la formule de Riemann à celle de Gauss.

La courbure de la surface définie par l'élément linéaire :

$$ds^2 = d\rho^2 + m^2 d\theta^2$$

est, d'après Gauss : $-\frac{1}{m}\frac{d^2 m}{d\rho^2}$ m fonct. de ρ et θ.

Si ρ est la longueur d'un arc géodésique issu d'un p. de la surface où celle-ci a une courbure ordinaire $m = \rho(1 + m'\rho^2)$

m' étant une fonction qui pour $\rho = 0$, n'est ni nulle ni infinie.

Donc la courbure au p. $\rho = 0$ est : $-6m'_0$.

Cela posé, les coordonnées de Riemann :

$$z_1 = \rho\cos\theta \qquad z_2 = \rho\sin\theta$$

donnent à l'élément linéaire la forme :

$$ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \frac{4(m^2-\rho^2)}{\rho^4}\left(\frac{z_1 dz_2 - z_2 dz_1}{2}\right)^2$$

par suite, la courbure au p. $\rho = 0$, est, d'après Riemann :

$$-\frac{3}{4}\lim \frac{4(m^2-\rho^2)}{\rho^4}$$

Or : $\lim_{\rho=0} \frac{m^2-\rho^2}{\rho^4} = 2m'_0$

donc les 2 expressions coïncident.

Il est clair que m'_0 (c.à.d. pour $\rho = 0$) doit être indépendant de θ.

Beltrami, Théorie fondamentale des espaces de courbure constante (trad. Houel, ap. Annales de l'École Normale Sup tome VI, 1869)

$$ds = R\,\frac{\sqrt{dx^2+dx_1^2+dx_2^2+\ldots\ldots+dx_n^2}}{x}$$

est l'élément linéaire d'un espace à $\underline{n}$ dimensions, c.à.d. où ch. p est défini par les $\underline{n}$ coord : $x_1\, x_2 \ldots\ldots x_n$; sous la condition :

$$x^2+x_1^2+x_2^2+\ldots\ldots+x_n^2 = a^2.$$

R et a étant des constantes.

Posons : $\Omega = \sqrt{dx^2+dx_1^2+dx_2^2+\ldots+dx_n^2}$

Eq des lignes géodésiques de cet espace : $\delta\int\frac{\Omega}{x}=0$

avec la condition : $x\,dx+x_1dx_1+\ldots x_ndx_n=0.$

$$\int\left\{\delta x\left[\frac{\Omega}{x^2}+d\left(\frac{dx}{x\Omega}\right)\right]+\delta x_1\, d\left(\frac{dx_1}{x\Omega}\right)+\ldots+\delta x_n\, d\left(\frac{dx_n}{x\Omega}\right)\right\}=0$$

d'où les équations :

$$\frac{\Omega}{x^2}+d\left(\frac{dx}{x\Omega}\right)=kx,\quad d\left(\frac{dx_1}{x\Omega}\right)=kx_1,\ \ldots\ d\left(\frac{dx_n}{x\Omega}\right)=kx_n.$$

Or : $d\left(\frac{x\,dx+x_1dx_1+\ldots+x_ndx_n}{x\Omega}\right)=k(x^2+x_1^2+\ldots+x_n^2)$

Donc $k=0$, et les éq. se réduisent à :

$$d\left(\frac{dx}{x\Omega}\right)+\frac{\Omega}{x^2}=0,\quad dx_1=c_1x\Omega,\ \ldots\ldots\ dx_n=c_nx\Omega$$

posant : $c=\sqrt{c_1^2+c_2^2+\ldots+c_n^2}$,

$$\Omega=-\frac{dx}{\sqrt{1-c^2x^2}}$$ ce qui vérifie la 1e éq. On intègre les autres ;

$$x_1=b_1x_n+b_1',\quad x_2=b_2x_n+b_2',\ \ldots\ x_{n-1}=b_{n-1}x_n+b_{n-1}'$$



Les lignes géodésiques de l'espace à n dim. sont représentées par $(n-1)$ éq. linéaires entre les n coord.

Longueur d'un arc géodésique en fonct. des coord de ses extrém :

$$\operatorname{ch}\frac{\rho}{R} = \frac{a^2 - x_1 x_1^0 - x_2 x_2^0 - \dots\dots - x_n x_n^0}{\sqrt{(a^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2)(a^2 - x_1^{0\,2} - x_2^{0\,2} - \dots - x_n^{0\,2})}}$$

En supposant réelles les variables $x_1\, x_2 \dots x_n$ et les const. R, a la limite (frontière) de l'espace de n dim. considéré est l'esp. de $(n-1)$ dim. dont l'éq. est :

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a^2.$$

dont tous les p. sont à une distance infinie de l'origine. A l'intérieur de cet espace limite, $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < a^2$, le premier espace est continu et simplement connexe

– Autre élément lin : $ds^2 = R^2 \dfrac{dx^2 + dx_1^2 + \dots\dots + dx_n^2}{x^2}$

$$ds^2 \delta s^2 - R^4 \frac{(dx\,\delta x + dx_1 \delta x_1 + \dots + dx_n \delta x_n)^2}{x^4} > 0 \quad \text{essentiellt.}$$

donc :
$$\frac{R^2 (dx\,\delta x + dx_1 \delta x_1 + \dots + dx_n \delta x_n)}{x^2\, ds\, \delta s} \leqq 1.$$

On peut poser : $dx\,\delta x + dx_1 \delta x_1 + \dots + dx_n \delta x_n = \dfrac{x^2 ds\, \delta s}{R^2} \cos\theta$

θ étant réel. Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$dx\,\delta x + dx_1 \delta x_1 + \dots\dots + dx_n \delta x_n = 0$$

Condition d'orthogonalité — On démontre que ~~le système des~~ ch ligne géod du syst. x_k est orthogonale à l'espace à $(n-1)$ dim : $x_k = 0$ –

– Les n lignes géodésiques menées d'un p. qcq. de l'espace dans les systèmes $x_1, x_2, \dots x_n$, sont perpend. aux espaces à $(n-1)$ dimensions.

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ... $x_n = 0$. Ce sont d'autres coordonnées du p.

$X_1, X_2, \dots\dots X_n$. On a: $X_k = \frac{R}{2}\log\frac{\sqrt{x^2+x_k^2}+x_k}{\sqrt{x^2+x_k^2}-x_k}$

Le système complet des lignes géodésiques issues du p. $(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0)$ est représenté par les éq. différentielles:

$$\frac{dx_1}{x_1-x_1^0}=\frac{dx_2}{x_2-x_2^0}=\dots\dots=\frac{dx_n}{x_n-x_n^0}=\frac{dx}{x-\frac{z}{x}}$$

où: $z = a^2 - x_1x_1^0 - x_2x_2^0 - \dots\dots - x_nx_n^0$.

La condition d'orthogonalité donne l'éq. diff de l'espace à $(n-1)$ dimensions orthogonal à toutes ces lignes géodésiques:

$$\frac{dz}{z}=\frac{dx}{x}$$

en intégrant: $$\frac{a^2-x_1x_1^0-x_2x_2^0-\dots\dots-x_nx_n^0}{\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2-\dots\dots-x_n^2}}=C$$

Cet espace est aussi le lieu des p. équidistants du p. $(x_1^0\, x_2^0 \dots x_n^0)$ (cf formule de ρ.) $C = x^0 \operatorname{ch}\frac{\rho}{R}$. $x^0=\sqrt{a^2-x_1^{0\,2}-\dots-x_n^{0\,2}}$

Quand le p. s'éloigne à l'infini, x^0 tend vers 0, et ρ vers ∞.
$\lim x^0 \operatorname{ch}\frac{\rho}{R} = \lim \frac{1}{2}x^0 e^{\rho/R}$ On a à la limite, l'éq.:

$$\frac{a^2-x_1x_1^0-x_2x_2^0-\dots\dots-x_nx_n^0}{\sqrt{a^2-x_1^2-x_2^2-\dots\dots-x_n^2}}=ke^{-\rho/R}$$

où: $x_1^{0\,2}+x_2^{0\,2}+\dots\dots+x_n^{0\,2}=a^2$

qui représente les espaces à $(n-1)$ dim. qui sont les traj. orthog des lignes géodésiques issues d'un point à l'infini. Leur paramètre est ρ, qui désigne la dist. const. de l'un d'eux à celui qui correspond à: $\rho=0$.



L'espace à n dim. considéré peut se superposer à lui-même —
D'abord, on peut changer les axes en conservant l'origine : soient de nouveaux axes géod. rectang. : $y_1\, y_2 \dots y_n$.
La dist. d'un p. à l'origine ~~est~~ dépend seulement de :

$$x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 = y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2$$

On a aussi :

$$dx_1^2+dx_2^2+\dots+dx_n^2 = dy_1^2+dy_2^2+\dots+dy_n^2$$

Donc :

$$\frac{dx_1^2+dx_2^2+\dots+dx_n^2}{x^2} = \frac{dy_1^2+dy_2^2+\dots+dy_n^2}{y^2}$$

Les 2 réseaux unis par la formule : $x_1=y_1,\ x_2=y_2,\ \dots\ x_n=y_n$ sont donc superposables par une simple rotation autour de l'origine. Comme on peut poser plus gén. : $x_1=\pm y_1,\ \dots\dots\ x_n=\pm y_n$, on a des égalités par symétrie, outre l'égalité par coïncidence.
Ensuite, on peut transporter les axes en un point qcq : on peut toujours supposer ce p. pris sur l'axe des x_1 à la dist. a_1. On fait donc glisser le système des axes le long de l'axe des x_1.
Nouv. coord : $y_1\, y_2 \dots y_n$; $Y_1, Y_2, \dots Y_n$; b au lieu de a

$$Y_k = \frac{R}{2}\log\frac{\sqrt{y^2+y_k^2}+y_k}{\sqrt{y^2+y_k^2}-y_k}$$

On a : $X_1^0 = \frac{R}{2}\log\frac{a+x_1}{a-x_1}$, $Y_1^0 = \frac{R}{2}\log\frac{b+y_1}{b-y_1}$

La dist. des 2 origines est : $\frac{R}{2}\log\frac{a+a_1}{a-a_1}$

$$X_1^0 = Y_1^0 + \frac{R}{2}\log\frac{a+a_1}{a-a_1} \qquad \frac{(a+x_1)(a-a_1)}{(a-x_1)(a+a_1)} = \frac{b+y_1}{b-y_1}$$

d'où : $x_1 = \frac{a(ay_1+a_1 b)}{ab+a_1 y_1}$, $y_1 = \frac{ab(x_1-a_1)}{a^2-a_1 x_1}$

$$a^2-x_1^2 = \frac{a^2(a^2-a_1^2)(b^2-y_1^2)}{(ab+a_1y_1)^2}\ , \quad b^2-y_1^2 = \frac{b^2(a^2-a_1^2)(a^2-x_1^2)}{(a^2-a_1x_1)^2}$$

$$\frac{a}{x}\sqrt{a^2-a_1^2} = a\frac{b}{y} + a_1\frac{y_1}{y} \qquad \frac{x_1}{x}\sqrt{a^2-a_1^2} = a_1\frac{b}{y} + a\frac{y_1}{y}$$

d'où : $d\left(\frac{a}{x}\right)^2 - d\left(\frac{x_1}{x}\right)^2 = d\left(\frac{b}{y}\right)^2 - d\left(\frac{y_1}{y}\right)^2$

$\frac{\Sigma dx^2}{x^2} = \frac{\Sigma dy^2}{y^2}$ l'élément lin. conserve la même forme

La transformation la plus générale des axes a lieu par des substitutions homographiques : $x_\kappa = \pm \frac{a y_\kappa \sqrt{a^2-a_1^2}}{ab + a_1 y_1}$

$(\kappa = 2, 3, \dots n)$

Transformation polaire : $x_1 = r\lambda_1, \; x_2 = r\lambda_2, \; \dots\dots \; x_n = r\lambda_n$,

avec la condition : $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 = 1$.

$dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2 = dr^2 + r^2 d\Lambda^2 \qquad (d\Lambda^2 = \Sigma d\lambda^2)$

donc : $ds^2 = \left(\frac{R a\, dr}{a^2 - r^2}\right)^2 + \frac{R^2 r^2}{a^2-r^2} d\Lambda^2$

$= d\rho^2 + \left(R\, \mathrm{sh} \frac{\rho}{R}\right)^2 d\Lambda^2$ (ρ rayon vecteur ; c. à d. dist. du pt à l'origine)

Transformation stéréographique :

$$\xi_\kappa = 2R\, \mathrm{th} \frac{\rho}{2R} \lambda_\kappa$$

$$\lambda_\kappa d\rho + R\, \mathrm{sh} \frac{\rho}{R} d\lambda_\kappa = d\xi_\kappa\, \mathrm{ch}^2 \frac{\rho}{2R}$$

$$\mathrm{ch}^2 \frac{\rho}{2R} = \frac{1}{1 - \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}{4R^2}}$$

$$ds = \frac{\sqrt{d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + \dots + d\xi_n^2}}{1 - \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2}{4R^2}}$$

Formule de Riemann

$$ds = \frac{\sqrt{\Sigma dx^2}}{1 + \frac{\alpha}{4}\Sigma x^2}$$



6 Autre système, déduit des coordonnées polaires (Riemann):

$$z_1 = \rho\lambda_1, \quad z_2 = \rho\lambda_2, \quad \ldots\ldots \quad z_n = \rho\lambda_n, \qquad (\rho^2 = \Sigma z^2)$$

$$d\lambda_k = \frac{\rho\, dz_k - z_k\, d\rho}{\rho^2}$$

$$d\Lambda^2 = \frac{\Sigma z^2 . \Sigma dz^2 - (\Sigma z\, dz)^2}{\rho^4} = \frac{\Sigma (z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2}{\rho^4}$$

$$d\rho^2 = \Sigma dz^2 - \frac{\Sigma(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2}{\rho^2} \qquad \text{d'où:}$$

$$ds^2 = \Sigma dz^2 + \frac{1}{\rho^2}\left[\left(\frac{R}{\rho}\,\mathrm{sh}\,\frac{\rho}{R}\right)^2 - 1\right]\Sigma(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2$$

$$= \Sigma dz^2 + \frac{1}{3R^2}\left(1 + \frac{2\rho^2}{15 R^2} + \ldots\right)\Sigma(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2$$

Pour ρ inf. petit: $$ds^2 = \Sigma dz^2 + \frac{1}{3R^2}\Sigma(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2$$

On peut toujours faire coïncider un élément de surface passant par l'origine avec l'élément de la surface $z_3 = 0,\ z_4 = 0, \ldots\ z_n = 0$, dont l'élém. lin. est: $$ds^2 = dz_1^2 + dz_2^2 + \frac{1}{3R^2}(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2$$

Or l'aire du tr. infinitésimal $(0,0), (z_1, z_2), (dz_1, dz_2)$ est $\frac{z_1 dz_2 - z_2 dz_1}{2}$; donc $\Sigma(z_1 dz_2 - z_2 dz_1)^2 = 4\Delta^2$

Δ désignant l'aire du tr. infinitésimal $(0, 0 \ldots 0)\ (z_1 z_2 \ldots z_n)\ (dz_1 dz_2 \ldots dz_n)$

En divisant la somme des termes du 4e ordre par Δ^2, on trouve donc: $\frac{4}{3R^2}$; en mult. par $-\frac{3}{4}$ (selon l'indication de Riemann) on trouve: $-\frac{1}{R^2}$ courbure de l'élément de surface.

Comme cette courbure est la même pour tous les éléments de surface en chaque point on peut dire que l'espace lui-même a une courbure constante.

Autre transformation : n var. indép. $\eta, \eta_1, \eta_2, \dots \eta_{n-1}$ en posant : $\frac{Rx}{a-x_n}=\eta$, $\frac{Rx_1}{a-x_n}=\eta_1, \dots\dots \frac{Rx_{n-1}}{a-x_n}=\eta_{n-1}$

d'où : $ds = \frac{R\sqrt{d\eta^2+d\eta_1^2+\dots\dots+d\eta_{n-1}^2}}{\eta}$

d'où l'on conclut que la 1° formule : $ds=\frac{R\sqrt{\Sigma dx^2}}{x}$ représente encore l'élément linéaire d'un espace à courbure constante, lorsque les $(n+1)$ variables $x, x_1, x_2, \dots x_n$ sont indép. entre elles (et non plus liées par la condition : $\Sigma x^2 = a^2$)

Seulement, dans ce cas le nombre des dimensions de l'espace est $(n+1)$, et la propriété des lignes géodésiques d'être représentées par des équations linéaires ne subsiste plus.

L'espace de $(n-1)$ dimensions : $\eta = \text{const.}$ a sa courbure nulle en tous ses points, car son élém. lin. est de la forme : $ds = \text{const} \times \sqrt{d\eta^2+d\eta_1^2+\dots+d\eta_{n-1}^2}$

Or, ~~par~~ la formule de Riemann : $ds=\frac{\sqrt{\Sigma dx^2}}{1+\frac{\alpha}{4}\Sigma x^2}$ ne peut se réduire à : $\sqrt{\Sigma dx^2}$ que si $\alpha=0$. L'espace : $\eta = 0$ est donc un espace plan

Interprétation : L'esp. à l'inf. sur l'axe des x_n a pour coord. :

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0 \quad , \quad x_n = a$$

d'où : $\frac{a-x_n}{x} = k' e^{-\frac{\rho}{k}}$ $\qquad k' = \frac{k}{a}$.

$\eta = \frac{R}{k'} e^{\frac{\rho}{k}}$ De $\eta = \text{const.}$ résulte : $\rho = \text{const.}$

L'espace de $(n-1)$ dimensions : $\eta = \text{const.}$ est une des traject. orthog. d'un système de lignes géod. parallèles entre elles

Substituons ρ à η : $ds^2 = d\rho^2 + k'^2 e^{-\frac{2\rho}{k}}(d\eta_1^2+d\eta_2^2+\dots+d\eta_{n-1}^2)$



L'ensemble de $(n-1)$ éq. lin. entre les n coord. $x_1 x_2 \dots x_n$ représ. une ligne géodésique. Que représ. l'ensemble de $(n-m)$ éq. linéaires ?
Supposons $x_1 x_2 \dots x_n$ exprimés linéairt en f. de $u_1 u_2 \dots u_m$; avec la condition : $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_m^2 + b^2$

Posons : $u^2 + u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_m^2 = a^2 - b^2 = a'^2$

On a : $dx^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2 = du^2 + du_1^2 + \dots + du_m^2$

$x^2 = u^2$; $\qquad ds = \dfrac{R}{u}\sqrt{du^2 + du_1^2 + \dots + du_m^2}$

avec la condition : $u^2 + u_1^2 + \dots + u_m^2 = a'^2$

c.à.d. que le lieu des p. repris. par les $(n-m)$ éq. lin. entre les $\underline{x}$ est un espace ~~de courbure constante~~ égale à $-\dfrac{1}{R^2}$ comme celle (à $\underline{m}$ dimensions) de l'espace primitif.

Ainsi, $(n-2)$ éq. lin. repris. une surf. de courbure const. $-\dfrac{1}{R^2}$.
$(n-3)$ repris. un esp. à 3 dim.
et ainsi de suite.

Une ligne géodésique est dét. par 2 p. Une surf de 1er ordre ~~à cbure const~~ (à cbure const $-\frac{1}{R^2}$) par 3 p.
Une surf ~~à cbure const~~ de 1er ordre contient toutes les lignes géod dét. par 2 de ses p.
2 surf du 1er ordre se coupent suivant une l. géod. sous un angle constant.

Un tr. géod. est situé sur une surf du 1er ordre qu'il dét. même s'il est inf petit. — formules : $ch\dfrac{a}{R} = ch\dfrac{b}{R}\, ch\dfrac{c}{R} - sh\dfrac{b}{R}\, sh\dfrac{c}{R} \cos A$
(diff. de la trig. sphérique par le chang. de R^2 en $-R^2$.)

$th\dfrac{a}{R} = th\dfrac{c}{R}\cos B$ $\qquad$ l'angle C étant droit.

En faisant croître le côté $\underline{b}$ et l'hypot. $\underline{c}$ à l'infini, on trouve
$\cos A = 1$, $\qquad th\dfrac{a}{R} = \cos B$

$A = 0$ c.à.d. les côtés b, c sont parallèles (convergent à l'infini sont asymptotiques)

L'angle B a une limite inférieure à 1 dr : $tg\frac{B}{2} = e^{-\frac{a}{R}}$

C'est l'angle de parallélisme de Lobatchefsky.

La possibilité d'une géom. non-euclidienne synthétique repose

1° sur la possibilité du déplacement d'une figure invariable d'où dépend l'existence des figures égales, et par suite la validité du principe de superposition ;

2° sur l'axiome de la ligne droite (elle est déterm par 2 points) ;

3° sur l'axiome du plan (il est dét par 3 points)

d'où s'ensuivent tous les axiomes fondamentaux de la géométrie ordinaire, à l'exclusion du postulatum d'Euclide. La géométrie de Lobatchefsky est donc la géom. de l'espace pseudosphérique (à courbure constante négative) et son param. est le rayon de courb. de l'espace ($R = \infty$ pour l'espace euclidien)

Les horicycles sont les circ. géod. dont le centre est à l'infini.

Les horisphères sont les sphères géod

Élém. lin. des surf de 1er ordre : $ds^2 = d\rho^2 + k'^2 e^{-\frac{2\rho}{R}} d\eta^2$

rapp. aux horicycles et à leurs rayons — Les horicycles peuvent s'appliquer sur les parallèles de la surface de révol. eng. par tractrice.

Élém lin. de l'espace pseudosphérique rapp aux horisphères et à leurs rayons : $ds = R\frac{\sqrt{d\eta^2 + d\eta_1^2 + d\eta_2^2}}{\eta}$

où : $\frac{Rx}{a-x_3} = \eta$, $\frac{Rx_1}{a-x_3} = \eta_1$, $\frac{Rx_2}{a-x_3} = \eta_2$.

Toute horisphère est repr. par : $\eta = \text{const}$. Donc courbure nulle.

$ds = \text{const} \times \sqrt{d\eta_1^2 + d\eta_2^2}$

η_1, η_2 coord. cartésiennes rectang. de l'horisphère



Espace à courbure ~~constante~~ positive $\frac{1}{R^2}$: Élément linéaire

$$ds = R\,\frac{\sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2 - dx^2}}{x}$$

(Il suffit de changer le signe de R^2, a^2, x^2 dans les prem formules)

Distance de 2 p.

$$\cos\frac{\rho}{R} = \frac{a^2 + x_1 x_1^0 + x_2 x_2^0 + \dots + x_n x_n^0}{\sqrt{(a^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2)(a^2 + x_1^{0\,2} + \dots + x_n^{0\,2})}}$$

$x_1\, x_2 \dots x_n$ n'ont pas de limite supérieure, peuvent devenir infinis

L'espace est ~~continu et simplement connexe~~ mais non infini.

car faisons : $x_1^0 = \lambda_1 \tau, \quad x_2^0 = \lambda_2 \tau, \quad \dots \quad x_n^0 = \lambda_n \tau,$

avec $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 = 1$, on a, pour $\tau = \infty$,

$$\cos\frac{\rho}{R} = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n}{\sqrt{a^2 + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}}$$

ce qui donne pour ρ une valeur finie et déterminée.

Deux points ne déterminent pas toujours une ligne géodésique

Soient les éq. d'une géod : $x_1 = b_1 x_n + b_1'$, $x_2 = b_2 x_n + b_2'$, ...

Si les 2 p. ont des coord infinies, il faudra écrire

$$\frac{x_1}{x_n} = b_1 + \frac{b_1'}{x_n}, \quad \frac{x_2}{x_n} = b_2 + \frac{b_2'}{x_n}, \quad \dots$$

et substituer aux 1ers membres les lim. des rapp. pour ces 2 p.

Si ces limites sont égales les valeurs des seconds coeff restent indéterminées. Si ces lim. sont différentes, tous les p de la ligne géod sont à l'infini.

Il n'y a pas de lignes géod parallèles – La géom sphérique s'appl aux triangles de l'esp. à cbure const. pos.

Si ds l'élém lin. de cet espace, on pose

$$\frac{a}{x} = y, \quad \frac{x_1}{x} = y_1, \quad \dots \quad \frac{x_n}{x} = y_n$$

on trouve $ds = R\sqrt{dy^2+dy_1^2+\dots\dots+dy_n^2}$

avec la cond. $y^2+y_1^2+y_2^2+\dots\dots+y_n^2 = 1$, (à n dim)

ce qui montre que les sphères géodésiques de rayon ρ, ds les esp. à courb. const. nég. $-\frac{1}{R^2}$, sont des espaces à $(n-1)$ dim. de courb. const. posi $+\frac{1}{R^2}$. La géom. sphérique rentre ainsi ds la géom. pseudosphérique

Helmholtz, Sur les faits qui servent de base à la géométrie (Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1868.)

Hypothèses de la géométrie générale.

I. L'espace à $\underline{n}$ dimensions est une multiplicité $\underline{n}$ fois étendue, c.à.d qu'un point (unité déterminée) y est défini par $\underline{n}$ variables indépendantes et continues.

II. Définition du corps solide (postulat de son existence) : Entre les $\underline{2n}$ coordonnées de tout couple de points appartenant à un corps solide, il existe une équation indépendante du mouvement de celui-ci, et qui est la même pour tous les couples congruents.

On appelle congruents tous les couples de points qui peuvent être amenés à coïncider.

Entre $\underline{m}$ points d'un corps solide il y aura donc $\frac{m(m-1)}{2}$ équations.

Or le nombre des coordonnées inconnues est $\underline{mn}$.

Il faut en retrancher $\frac{n(n+1)}{2}$, qui répondent à la position variable du corps solide. On a donc $\frac{(m-n)(m-n-1)}{2}$ ~~équations~~, équations de plus que d'inconnues, quand $m > n+1$.

Toutes les relations ne sont donc pas possibles entre 2 p. qcq. d'un solide



III. On suppose la mobilité parfaite d'un corps solide.
Le 1er point d'un solide étant absolument libre, il faut n équations pour le fixer. Alors on a 1 éq. pour déterminer le 2e p. donc il faut $(n-1)$ éq. pour le fixer. On a 2 éq. pour déterminer le 3e donc il faut $(n-2)$ éq. pour le fixer. Il faut donc en général fixer n points d'un corps solide pour le fixer tout entier ; et $\frac{n(n-1)}{2}$ données pour fixer sa position.

Corollaire de II et III : Deux couples de points congruents dans une certaine position sont congruents dans toute autre position autrement dit, la congruence est indépendante du lieu
(cf Optique physiologique, pr la déformation des images rétiniennes)

IV. (Propriété correspondant à la monodromie analytique)
Quand un corps solide tourne autour de $(n-1)$ points, de sorte que sa position ne dépend que d'une variable indépendante, une rotation sans recul (dans le même sens, sans repasser par les positions déjà parcourues) doit finir par le ramener à sa position initiale.

L'hypothèse de Riemann : qu'il existe une fonction homogène du second degré des différentielles, qui reste constante dans le déplacement de 2 p. infiniment voisins invariablement liés, équivaut à l'hypothèse ~~de la monodromie de l'espace~~ que des éléments spatiaux infiniment petits sont congruents (de même que ds la géom. euclidienne les éléments de toutes les surfaces sont plans, donc congruents)
– L'hypothèse III postule la congruence des parties finies de l'espace

Étant posées ces de hypothèses, la géométrie la plus générale possible est celle d'un espace sphérique à 3 dimensions, dont l'éq serait (x, y, z, s étant les coord. de l'esp. à 4 dim.):

$$x^2+y^2+z^2+(s+r)^2=r^2$$

x, y, z ne peuvent ~~de~~ devenir infinis que si $r=\infty$; c'est le cas de la géométrie euclidienne (courbure nulle)

Si $s=0$, x, y, z ne peuvent avoir que des valeurs finies; c'est l'équation du plan. L'espace euclidien doit être considéré comme plan par rapport aux espaces de plus de 3 dimensions.

Si l'on supprime le postulat IV, on obtient une infinité d'autres géométries toutes conséquentes avec elles mêmes.

Soit l'éq: $(\lambda_0 x+\mu_0 y+\nu_0 z)^2+(\lambda_1 x+\mu_1 y+\nu_1 z)^2=A^2 e^{2\theta\eta}$

Si $\theta \gtrless 0$ (η variable indépendante) les dimensions d'une figure plane varient avec l'angle dont elle tourne (η).

Le lieu des points équidistants d'un point donné est alors la spirale (cf. surfaces spirales)

Si dans le plan on considère y ~~y~~ comme imaginaire, le lieu des p. équidistants d'un p. donné est une hyperbole équilatère.

— Pour obtenir la géométrie euclidienne, il faut ajouter 2 postulats:

V. L'espace a 3 dimensions.

VI. L'espace a une étendue infinie

L'indépendance de la congruence par rapport au lieu, à la direction des figures qui se recouvrent et au chemin suivi pour les amener à coïncider est le fait qui fonde la géométrie euclidienne

Ce fait dépend de l'existence de corps naturels suffisamment voisins de notre concept du corps solide



Paul Tannery, La géométrie imaginaire et la notion d'espace (Revue philosophique, tome III, p. 553.)

Il faut distinguer :

1° La géométrie à n dimensions qui n'est qu'une algèbre où l'on emploie dans un sens tout métaphorique des termes empruntés à la géométrie usuelle ;

2° La géométrie imaginaire, où, pour arriver finalement à des démonstrations portant sur des figures réelles, on considère des relations analytiques compliquées d'expressions de la forme $x+y\sqrt{-1}$, relations que l'on désigne symboliqᵗ avec les mots de points, lignes, figures imaginaires ;

3° Enfin la géométrie non-euclidienne

— Les surfaces développables ont leur courbure totale nulle. Pour les distinguer (puisqu'elles ont toutes un rayon de cbure infini), on peut recourir à l'autre rayon de cbure. Si celui-ci est constamment nul, la surface est un plan.

— Une figure ne peut se déplacer sans déformation que sur le plan et la sphère ; elle peut se déplacer sans extension sur toutes les surfaces à courbure constante. — De même, un segment linéaire ne peut se déplacer sans déformation que sur la droite, le cercle et l'hélice circulaire ; mais il peut se déplacer sans extension sur une courbe quelconque.

(Quoi qu'en dise M. P. Tannery, les surfaces à cbure constante ne sont pas les analogues d'une courbe qcque, mais des lignes à courbure constante ; de sorte qu'à la non-déformation des figures linéaires correspond bien, comme l'a dit M. Liard, la non-extension des figures superficielles, qu'elles se déforment ou non.)



Aussi une figure pourra se ~~mouvoir~~ transporter sans déformation sur un cylindre, mais non y tourner.

Les pseudosphériques de Beltrami ne sont pas les analogues de la sphère, mais des surfaces à courbure constante autres que la sphère, car l'égalité de la courbure dans tous les sens autour d'un point ne peut exister que sur une surface à courbure positive ou nulle (plan et sphère).

La surface idéale, type des surfaces pseudosphériques, est une surface imaginaire, une sphère de rayon imaginaire, sa courbure constante est $-\frac{1}{R^2}$. Aussi ne peut-on la construire dans l'espace euclidien.

— Quel est l'espace réel ? C'est à l'expérience à prononcer, absolument comme pour la loi de gravitation. Il est vrai qu'elle ne pourra jamais être absolue ——

Le concept de l'espace est formé par une association de diverses notions parfaitement distinctes les unes des autres, celles de grandeur, de continuité, de dimension, de triplicité, de mesure, d'identité de l'unité de mesure suivant les diverses dimensions, de distance, de loi analytique relative à la distance de deux points.

La distance de l'origine à un point qcq est une fonction des coord. de ce point (Riemann). Mais cette fonction est arbitraire; elle n'est soumise qu'à une condition, de devenir égale en valeur absolue (car elle est toujours supposée positive) à une quelconque des coordonnées quand toutes les autres s'annulent.

Lechalas, La géométrie générale et les jugements synthétiques à priori (ap. Revue philosophique, XXX, 157.)

Cf Critique philosophique, 30 sept. et 30 nov. 1889.

— Si dans les espaces non-euclidiens les propriétés des figures dépendent de leurs dimensions, de sorte qu'il n'y existe pas de figures semblables, cela ne signifie nullement que les dimensions aient une valeur absolue, attendu que toutes ces dimensions sont relatives à une grandeur qui sert à définir chaque espace et qui peut être reproduite (construite) dans un espace quelconque. — C'est ainsi que les propriétés des figures sphériques dépendent de leurs dimensions; mais ces dimensions sont essentiellement relatives au rayon de chaque sphère ... Donc les dimensions n'ont rien d'absolu.

— Le postulat de l'homogénéité paraît s'imposer avec une autorité bien plus grande que tous les autres, car il semble invinciblement lié au caractère purement relatif de l'espace; mais ... cet espace homogène est distingué des autres par la valeur d'un coefficient, qui est infini pour lui et fini pour tous les autres, et ce coefficient est une grandeur géométrique (longueur) constructible dans un espace quelconque, en sorte que toutes les grandeurs de l'espace correspondant n'ont point une valeur absolue, mais lui sont essentiellement relatives, comme les figures tracées sur une sphère ont des dimensions relatives à son rayon.



La géométrie générale nous montre que les postulats peuvent être écartés sans dommage pour une science purement rationnelle. Cette science comporte dans ses formules un coefficient indéterminé, dont une valeur spéciale correspond précisément à la géométrie spéciale fondée sur les dits postulats. Cela étant, on voit que s'il existe, soit un monde extérieur, soit des sensibilités dont la forme répond à une géométrie, il est de toute nécessité que l'expérience nous apprenne quel coefficient y est applicable.

— La géométrie ~~générale~~ euclidienne n'a pas de base expérimentale —

La géométrie générale montre simplement que plusieurs espaces à trois dimensions sont rationnellement possibles et ne fait intervenir l'expérience que pour reconnaître lequel de ces espaces est en fait réalisé.

— Un espace à n dimensions est dit identique à lui-même dans toutes ses parties, si l'on peut y déplacer sans déformation ~~pour~~ d'une ~~façon quel~~ façon qcq. toute figure qui y est située.

Une géodésique d'une surface identique à elle-même est une ligne située sur elle et telle, que par deux points de la surface il en passe toujours une et généralement une seule.

Le plan est une surface identique à elle-même et retournable.

La ligne droite est une ligne telle, que par deux points il en passe toujours une et généralement une seule, dans un espace à trois dimensions. On démontre qu'elle est la géodésique du plan.

— Il suffit, pour fonder une géométrie, d'axiomes communs (purement analytiques) et de définitions. Les définitions fondamentales ne sont point fondées sur une génération, mais ~~sur une~~ sont purement descriptives et se bornent à énoncer une propriété caractéristique de

la figure définie. La légitimité d'une telle définition ne repose que sur l'absence de contradictions dans les déductions auxquelles elle sert de base ——

La géométrie est une science qui se ramène tout entière à des relations entre grandeurs ——

— Tout système géométrique qui peut être poursuivi indéfiniment sans qu'on se heurte à une contradiction est rationnellement légitime, et ne saurait être écarté qu'en vertu de considérations pratiques, si l'on tient à avoir une géométrie conforme à la réalité.

La géométrie est une science purement rationnelle, qui ne relève que d'elle-même. . .

Pourquoi borne le caractère de nécessité (de l'espace) à une impossibilité de fait imposée à notre imagination, il n'y a aucune difficulté à admettre que notre sensibilité pourrait être autre qu'elle n'est, et partant, que les géom. non euclidiennes sont parfaitement légitimes.

Pour qu'il y ait incompatibilité entre celles-ci et la doctrine criticiste, il faut que cette dernière déclare la forme de notre sensibilité nécessaire d'une nécessité absolue. . .

Or nous ne voyons que deux moyens de justifier une assertion si hardie: il faudrait, ou montrer que l'hypothèse contraire conduit à des contradictions, ou à défaut de cette preuve suprême qu'on reconnaît impossible, établir que, en dehors de la conception euclidienne, on ne saurait construire un espace c.à.d. que, sans ses postulats, aucune géométrie n'est possible ——

[M. Calinon démontre que la géodésique d'une surface identique à elle-m. est la ligne la plus courte joignant deux de ses points :
La sphère, la ligne droite et le plan, th. final du ch. I.)



~~Le p~~ La demande d'Euclide : Description d'un cercle ~~…~~ est inutile ; ~~Il~~ ~~cette possibilité~~ résulte de la propriété du plan d'être une surface identique à elle-même.

Rien n'empêche d'étudier des espaces à 3 dim. qui ne soient pas identiques à eux-mêmes, absolument comme les surfaces identiques à elles-mêmes ne sont pas les seuls espaces à 2 dims — Nous ne voyons d'ailleurs rien qui impose le postulat des 3 dimensions pour qui ne voit dans l'espace qu'un système de relations, quel que soit d'ailleurs leur caractère objectif.

Il nous paraît bien plus philosophique de tout ramener, avec M. Delbœuf (Prolégomènes philosophiques de la géométrie) au postulat de l'homogénéité de l'espace, postulat d'après lequel une figure peut toujours être majorée ou minorée sans que sa forme soit changée : l'existence de figures semblables constitue en effet la propriété caractéristique de l'espace euclidien, et cette propriété admise, tous les postulats ordinaires peuvent être démontrés.

Critique philosophique, sept. 1889 (nouvelle série, 5e année, t. II.)

M. Lechalas : la géométrie générale

Citation de M. Calinon : « L'espace euclidien est seul homogène car la possibilité de construire une figure à diverses échelles est liée à la théorie des parallèles et au postulatum d'Euclide. Dans les espaces non euclidiens il est impossible de réduire, par exemple de moitié, les dimensions d'une figure et de conserver les angles. On exprime souvent cette idée en disant que, dans l'espace euclidien, l'étendue d'une figure est relative tandis que ~~dans~~ les autres espaces les figures ont des dimensions absolues. »

Selon M. Lechalas ces prétendues dimensions absolues dépendent d'une grandeur qui leur restitue le caractère de relativité que nos conceptions métaphysiques nous obligent à affirmer. Il fait cesser une antinomie entre la science et des convictions métaphysiques auxquelles il ~~est~~ serait bien difficile de renoncer.

– Excès sphérique d'un polygone : $E = \Sigma A - 2(n-2)$

ΣA_1 (somme des angles extérieurs) $= 2n - \Sigma A$. Donc

$E = 4 - \Sigma A_1$, formule indépendante de n.

Les aires sont proportionnelles aux excès sph. $S = KE$.

K est le paramètre de la surface sphérique.

Il n'existe pas de figures semblables sur cette surface, qui constitue dès lors un espace non homogène ; mais nous ne saurions admettre que les dimensions y soient par là même absolues, attendu qu'elles sont toujours relatives au paramètre K qui est une grandeur géométrique.

– Quand on étudie la sphère dans la géom. à 3 dim. les diverses sphères présentent evidemment essentiellement comparables leurs



rayons ; mais pour l'instant ... nous étudions chaque surface sphérique en elle-même, et c'est sur elle que nous devons trouver les unités de mesure applicables aux figures qui y sont situées. Or il semble qu'aucune comparaison ne soit possible entre les figures tracées sur deux sphères inégales ... La solution de cette difficulté est donnée de une façon fort simple par le théorème d'après lequel la somme des angles d'un triangle géodésique infiniment petit est égale à deux droits — Il résulte de là que toute figure sphérique infinitésimale peut être reproduite sur une sphère quelconque, ce qui rend possible la comparaison entre toutes les figures sphériques —

– On peut dire que les espaces non-euclidiens ne sont pas homogènes et que les figures y ont des dimensions absolues, mais cette dernière expression est absolument impropre, ... attendu que ces dimensions sont relatives au paramètre K, qui lui-même est déterminé en fonction de grandeurs géométriques appartenant à l'espace considéré. On notera que le paramètre K n'est point un nombre abstrait, tel que serait le rapport de deux longueurs mais bien une véritable grandeur géométrique, de puissance 2 par rapport aux longueurs.

Pour les surfaces sphériques, ce paramètre est égal au carré du rayon. Lobatschewsky a eu le tort de dissimuler le paramètre spatial en le prenant pour unité.

La sphère de rayon R dans l'espace de paramètre K a pour paramètre :

$K' = K \sin^2 \frac{R}{\sqrt{K}}$ Pour $K = \infty$ (esp. euclidien) $K' = R^2$.

Pour $K > 0$, K' est une fonction périodique de R qui ne dépasse jamais R ; la surf d'un cercle a une limite supérieure ; l'espace est fini.

Pour $K < 0$, $\sqrt{K'} = \sqrt{K} \sin \frac{R}{\sqrt{K}} = R + \frac{R^3}{1.2.3} \times \frac{1}{K_1} + \frac{R^5}{1.2.3.4.5} \times \frac{1}{K_1^2} + \ldots$

$K_1 = |K|$ La somme de cette série croît indéfiniment avec R donc l'espace est illimité.

M. Lechalas ~~prétend~~ affirme que la géométrie générale se passe de tout postulat ; elle ne s'appuie que sur ~~les~~ axiomes de la science générale des grandeurs et sur des définitions dont la légitimité rationnelle résulte de la possibilité de poursuivre indéfiniment les déductions fondées sur elles, sans rencontrer jamais aucune contradiction — Cette science met en évidence le caractère contingent de l'espace

En résumé, notre espace est aussi contingent que tous les phén. de ce monde ; pour déterminer le paramètre K qui le caractérise et le déterminer, l'observation est aussi nécessaire que pour déterminer l'excentricité de l'orbite d'une planète. Mais, de même que cette excentricité étant une fois connue, toutes les propriétés de l'orbite sont connues par une science apodictique indépendante du fait que cet orbite a une réalité objective de même la détermination du paramètre K fait simplement connaître à laquelle des géométries particulières répond l'univers

— Note : Il est clair que la détermination du paramètre K n'est faite qu'avec une certaine approximation comme toutes les déterminations expérimentales.

La géométrie générale force à admettre des espaces à 3 dimensions distincts, dans chacun desquels ne peuvent entrer les figures appartenant aux autres —

La géométrie non euclidienne est un cas particulier d'une science plus générale, la géométrie générale qui ne la contredit aucunement.



Critique philosophique, novembre 1889.

M. Renouvier : la Philosophie de la règle et du compas

— M. R propose un postulat de la perpendicularité ainsi conçu :

Si sur un point commun à deux droites on fait tourner l'une d'elles autour de l'autre, sans sortir de leur plan, parmi toutes les positions qu'elle occupera dans ce mouvement, il y en aura une pour laquelle les deux droites formeront entre elles quatre angles égaux placés deux à deux de chaque côté de chacune.

Quant à la proposition de l'égalité de tous les angles droits, ... c'est une puérilité. Cette proposition est non-seulement analytique, mais même une identité immédiate, la figure de l'angle droit étant partout .... la même chose.

S'adresser, pour la collection de la Critique philosophique (100 f.) à M. Adrien Aucompte, au Pontet (Vaucluse).

Annales de philosophie chrétienne avril 1890.

Abbé de Broglie : la géométrie non-euclidienne

— Le postulatum d'Euclide peut se démontrer si l'on admet que les lignes droites ~~sont homogènes~~ (semblables entre elles) sont homogènes : autrement dit, que la majoration des figures ne change pas les angles et conserve la similitude.

Le postulatum est évident par intuition, comme les propriétés de la droite et du plan qui ne sont pas contenues dans les définitions. Ces propriétés ~~se~~ se manifestent d'ailleurs par le postulatum.

La géométrie générale n'a qu'une valeur symbolique, comme la géométrie des imaginaires : ce qui ne l'empêche pas de servir à la géométrie euclidienne qui en est un cas particulier —

— La somme des angles d'un triangle non-euclidien dépasse deux droits d'une quantité proportionnelle à la surface du triangle et inversement proportionnelle au carré du paramètre.

— « Pour que l'analogie de la géométrie sphérique et de la géom non-euclidienne ait qq valeur, il faut admettre une quatrième dimension, une sorte de surespace dans lequel les espaces distincts à 3 dimensions seraient contenus, comme les surf homogènes diverses sont contenues dans l'espace à 3 dimensions »

La géométrie générale n'est plus de la géométrie mais de l'algèbre

« Avec la possibilité d'une quatrième dimension disparaît l'analogie entre les prétendus espaces non euclidiens et les surfaces homogènes différentes du plan. »

« Une ligne droite non soumise au postulatum n'est plus une ligne droite ; ce n'est pas non plus une courbe ; c'est une chimère, un être contradictoire. »

Conséquences absurdes de la négation du postulatum



2e article (juillet 1890)

Les valeurs différentes du paramètre s'excluant les unes les autres (puisque les divers espaces correspondants ne peuvent coïncider) il n'y en a qu'une bonne, qu'une vraie; les autres constitueront des systèmes impossibles. Si l'un de ces systèmes est vrai, tous les autres sont faux. — Or il n'y a aucune raison pour choisir telle valeur finie du paramètre plutôt que telle autre. Mais il y a au contraire deux graves raisons pour choisir la valeur infinie qui rend le déficit angulaire nul: 1° elle est hors de pair (unique); 2° elle se vérifie dans l'expérience.

La comparaison des portions infiniment petites de divers espaces non-euclidiens est impossible, puisque deux espaces distincts ne peuvent coïncider en aucune partie. Il faudrait qu'ils eussent un point de contact... On ne voit pas comment les points d'un espace pourraient coïncider avec ceux d'un autre, puisque les figures composées de points s'excluent. Il n'y a dès lors aucun moyen de comparer les paramètres.

<u>Note</u>: c'est l'emploi des infiniment petits pour comparer les paramètres de divers espaces que nous combattons.

Dans la géométrie de Riemann il y a des triangles birectangles, donc des droites qui se rencontrent en 2 points, ce qui <u>contredit</u> la définition de la ligne droite.

Le plan de Riemann est une sphère, il n'est donc pas retournable, et il est impossible que de telles surfaces se coupent suivant leurs géodésiques. — Donc contradiction de la géom. des espaces à courbure positive.

La seule géom. qui échappe à la contradiction intrinsèque est celle des espaces à courb. négative; mais le recours à l'intuition suffit à la condamner, et cette intuition est d'une évidence absolue.

Les définitions géométriques ne créent pas leur objet, elles le supposent. ~~L'intuition~~ à l'état de possible, et cette possibilité est l'objet d'une intuition directe qui la rend évidente.

L'intuition précède donc la définition.

Le postulatum d'Euclide n'est pas un postulat; c'est une intuition qui complète la définition de la ligne droite.

Les données premières de l'intuition géométrique ne sont ni le produit empirique de la perception ni l'œuvre de l'imagination ni une forme a priori de l'esprit humain : elles sont l'œuvre de l'abstraction opérant sur les données sensibles.

La faculté d'abstraction, l'intellect actif dégage l'étendue pure des sensations qui l'accompagnent.

C'est la raison qui perçoit, qui définit et qui déduit; c'est elle qui crée la géométrie, car c'est elle qui perçoit les idées métaphysiques et les lie entre elles. L'imagination aide la raison comme le dessin est un appui pour l'idée.

La géométrie vraie, c'est la vraie réalité étendue perçue dans la nature par la raison.



Annales de philosophie chrétienne octobre 1890.

M. Lechalas : La géométrie générale et l'intuition

— M. de Broglie porte la question sur son véritable terrain en substituant au postulatum d'Euclide celui de l'homogénéité de l'espace. — Il a ainsi retrouvé sans s'en douter ... une démonstration très intéressante de M Delbœuf.

— ~~L'absence~~ S'il n'y a pas de figures semblables, les dimensions ont-elles une valeur absolue ? — Le paramètre caractéristique de chaque espace à 3 dimensions n'est pas un nombre abstrait, mais une grandeur géométrique, dont la racine carrée est une ligne.

$$\frac{K}{K'} = \frac{a^2}{a'^2} \qquad \frac{a}{a'},$$ rapp de similitude linéaire

Réponse de M de Br : 2 espaces ayant en gén. en commun une surface on peut très bien transporter une surf de l'un dans l'autre. La définition de la longueur des droites non-euclidiennes par les infiniment petits est aussi légitime que celle de la longueur des courbes — On peut donc reporter une longueur qcq par portions infiniment petites d'un espace dans un autre, sans passer par l'intermédiaire de lignes communes, ~~mais~~ non plus que par celui de triangles infiniment petits.

$\lim \frac{AB_E}{AB} = 1.$

— M de Br dit : 2 rails de chemin de fer ne pourraient être tous deux droites de la géom. gén. car la ligne équidistante d'une droite est une courbe.

Rép — À la surface de la terre les 2 rails sont courbes et si l'un est un arc de grand cercle, l'autre est un arc de petit cercle

[Stallo, La matière et la physique moderne ; adversaire de la géométrie non-euclidienne]

Il ne faut pas demander, avec M Rabier, que toutes les définitions se fassent par génération, car la génération ne peut s'appliquer tout au moins à la première définition



M. L. n'admet pas que la possibilité d'un système logique ne dépende pas seulement de ~~sa non~~ l'absence de contradiction logique mais encore de l'intuition. — Toute définition non-contradictoire est légitime et représente un objet possible : « Quidquid contradictionem non implicat, Deus potest. » (S. Thomas, C. *Gent.* II, 22.) « Omnipotentia Dei potest immediate quodlibet quod non claudit contradictionem. » (Duns Scot, *Sent.* lib I, dist. 2, q. 2.)

L'analogie conduit, selon nous, à concevoir les espaces à trois dimensions comme inclus, au moins logiquement, dans un espace à quatre dimensions.

M. de B. invoque pour condamner la géométrie générale *l'intuition géométrique* comme Kant. M. Renouvier invoque *les jugements synthétiques a priori*. (Ampère disait que la certitude du postulat résulte d'une *intuition synthétique*.)

Pour nous, le postulat fait partie de la définition de l'espace. On ne peut se construire de l'espace euclidien que par un postulat ou une définition équivalente.

Le paramètre est arbitraire, logiquement du moins, ce qui ne veut pas dire que le Créateur n'ait pas eu de bonnes raisons pour choisir le paramètre infini, qui répond à une géométrie plus simple que les autres.

~~On~~ ~~En recourant~~ Le recours à l'observation pour déterminer ce paramètre, loin de favoriser l'empirisme, débarrasse la science géométrique d'un élément qui prêtait le flanc aux attaques des empiristes et lui restitue son caractère *de science apriorique*.

Les bases expérimentales (?) de la géométrie, d'après Andrade (Revue philosophique XXX, 407.)

Notion du déplacement d'un ensemble invariable

Postulats : I. Il existe entre 2 p. A et B de l'espace une ligne qui, en tournant à la façon d'un ensemble invariable, ne cesse pas de coïncider avec elle-même : Déf de la ligne droite

II. Une ligne droite peut être prolongée indéfiniment dans deux sens différents.

III. Elle est formée d'une infinité de portions identiques entre elles

IV. L'existence du plan (Il est indéfini)

V. Distribution de l'espace de part et d'autre du plan (selon que la dr. qui joint 2 p. perce ou non le plan)

VI. Distribution d'un plan de part et d'autre d'une droite

VII. Double mode de superposition des angles plans (Retournement. Orientation)

VIII. Existence du déplacement de rotation (déterminé ; fini.)

(Corollaire : réciprocité de situation de 2 dr. perpendiculaires)

IX. Postulatum d'Euclide, établissant un lien entre les mesures linéaires et les mesures angulaires de l'espace.

Du p. O on abaisse la perp. OP sur XY. Du p. P on chemine sur XY dans les 2 sens, les dr. OM, OM' tendent chacune vers une limite OL, OL'. Ces 2 droites sont symétriques. Le postulat consiste dans ce *fait* qu'elles coïncident.

M Poincaré : Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie.
ap. Bulletin de la Société mathématique de France t. XV (1887)

— Hypothèses nécessaires et suffisantes de la géométrie plane euclidienne

A. Le plan a deux dimensions.

B. La position d'une figure plane dans son plan est déterminée par trois conditions.

C. Quand une figure plane ne quitte pas son plan et que deux de ses points restent immobiles, la figure tout entière reste immobile.

— Ces 3 premières hypothèses déterminent les géométries quadratiques (sur les surfaces du second ordre)

D. La distance de 2 points ne peut être nulle que si ces deux points coïncident ;

E. Lorsque deux droites se coupent, on peut faire tourner l'une d'elles autour du point d'intersection de façon à la faire coïncider avec l'autre.

— Ces deux hypothèses sont liées nécessairement l'une à l'autre ; il suffit d'admettre l'une d'elles pour être obligé d'admettre l'autre ; elles excluent la géométrie de l'hyperboloïde à une nappe.

F. Deux droites ne peuvent se couper qu'en un point.

— Cette hypothèse exclut la géométrie sphérique (~~de l'ellipsoïde~~)

G. La somme des angles d'un triangle est constante.
(Postulatum d'Euclide) (~~exclut la géom. de l'hyperboloïde à 2 nappes~~)

— Ce postulat nous dispense des hypothèses D, E et F qui en sont des conséquences nécessaires.

[L'hypothèse qu'il existe 2 mouvements (substitutions) permutables équivaut au postulatum d'Euclide.]



La géométrie de l'ellipsoïde est celle de Riemann.
La géométrie de l'hyperboloïde à 2 nappes est celle de Lobatchevski.
La géométrie du paraboloïde elliptique est celle d'Euclide.
La géométrie de l'hyperboloïde à une nappe est caractérisée par les propositions suivantes :

1° La distance de 2 points situés sur une même génératrice rectiligne est nulle.

2° Il y a 2 sortes de droites correspondant, les unes aux sections (planes) diamétrales elliptiques, les autres aux sections diamétrales hyperboliques ; il est impossible, par aucun mouvement réel, de faire coïncider une droite de la première sorte avec une droite de la seconde.

3° Il est impossible de faire coïncider une droite réelle avec elle-même par une rotation réelle autour d'un de ses points, ainsi que cela a lieu dans la géométrie d'Euclide quand on fait tourner une droite de 180° autour d'un de ses points. (cf. postulat de perpendicularité)

— On définit droites les sections planes diamétrales de la surface du second ordre considérée, circonf. les sections non diamétrales.
Angle de 2 droites : log. du rapp. anharmonique des tangentes aux 2 sections planes appelées droites et des 2 génératrices passant par le point d'intersection (divisé par $2\sqrt{-1}$ si la surf. n'est pas réglée)
Longueur d'un segment de droite : log. du rapp anharmonique des 2 extrémités de l'arc et des 2 points à l'infini de la conique appelée droite (divisé par $\sqrt{-1}$ si la conique est une ellipse)

— Th. de Sophus Lie : Si la position d'une figure plane dans son plan dépend d'un nombre fini de conditions, le nombre de ces conditions ne peut surpasser 8.

(cf. Théorie des groupes)

M. Picard, ap. <u>Revue générale des sciences pures et appliquées</u>, 15 novembre 1892 (3e année, n° 21.)

cf. même <u>Revue</u> 30 novembre 1890.

(A propos des travaux de M. Sophus Lie sur les groupes de transformations et les fondements de la géométrie.)

Étant donné un espace à 3 dimensions dont chaque point est défini par 3 quantités (x, y, z) qu'on appelle les <u>coordonnées</u> du point, ~~on appelle~~ un mouvement d'une portion de l'espace, est défini par ~~les~~ 3 équations :

$$x' = f(x, y, z)$$
$$y' = \varphi(x, y, z)$$
$$z' = \psi(x, y, z)$$

Par cette transformation un ensemble E de points (x, y, z) devient un autre ensemble E' de points (x', y', z') ; cette transformation est pour nous un <u>mouvement</u> qui amène E en E'.

— Nous faisons sur l'espace considéré les hypothèses suivantes :

1° Les mouvements possibles dans cet espace sont tels qu'ils laissent invariable une fonction $\Omega(x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2)$ des coordonnées de 2 points quelconques $(x_1 y_1 z_1)$ et $(x_2 y_2 z_2)$. En d'autres termes, si l'on désigne par $(x'_1 y'_1 z'_1)$, $(x'_2 y'_2 z'_2)$ les coordonnées de ces points après un quelconque des mouvements possibles, on aura :

$$\Omega(x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2) = \Omega(x'_1 y'_1 z'_1 x'_2 y'_2 z'_2)$$

En langage vulgaire, cela veut dire qu'il y a relativement à 2 points de l'espace <u>quelque chose</u> qui reste invariable dans tout mouvement ; on pourra appeler ce <u>quelque chose</u> la distance des 2 points.



2° On suppose (Helmholtz) que le mouvement libre est possible dans une certaine région de l'espace. Cela veut dire, selon M. Lie :

— 1) quand un point de la région est fixé, tout autre point de cette région, sans aucune exception, décrit une surface (multiplicité à 2 dimensions);

2) quand deux points sont fixés, un point quelconque (~~sans excep~~ sauf exceptions) décrit une courbe (multiplicité à une dimension);

3) si trois points sont fixés dans la région, tous les points de celle-ci restent en repos (sauf exceptions).

— Telles sont les conditions que nous imposons à l'espace. Il en résulte nécessairement que l'ensemble des mouvements possibles doit former un groupe à 6 paramètres. On connaît 2 types d'espace satisfaisant à ces conditions. C'est tout d'abord l'espace ordinaire ou euclidien; tels sont aussi les deux espaces non euclidiens, c.à.d. les espaces dans lesquels le groupe des mouvements possibles est le groupe projectif transformant en elle-même l'une ou l'autre des surfaces du second degré :

$$x^2 + y^2 + z^2 \pm 1 = 0$$

M. Lie a établi que les groupes précédents sont les seuls qui jouissent des propriétés énoncées.

Mais si l'on supprime, dans les conditions énoncées plus haut, les mots : sans aucune exception, on trouve d'autres groupes que les groupes euclidien et non euclidiens.

— Les dernières recherches de M. Lie épuisent, pour les géomètres, sinon pour les philosophes, la question des principes de la géométrie (2 mémoires récents sur les fondements de la géométrie (?)

[V. mémoire de M. Poincaré sur les équations différentielles de la dynamique résumé par son auteur dans la Revue du 15 janvier 1891.)

(Gottinger Nachrichten)

Dans un mémoire publié en 1884 ~~(où ?)~~ M Weierstrass a développé une théorie des nombres complexes. Il considère des ~~nombres~~ ensemble de la forme : $x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$

où les $\underline{x}$ sont des nombres réels, et les $\underline{e}$ de purs symboles

On suppose que la somme, la différence, le produit et le quotient de 2 nombres de l'ensemble font eux-mêmes partie de cet ensemble. Les produits : $e_p e_q$ $(p, q = 1, 2, \dots n)$

~~sont donc~~ des expressions E_{pq} linéaires et homogènes en $e_1 e_2 \dots e_n$, qui jouent le rôle essentiel dans la théorie. M W. suppose de plus que les théorèmes dits commutatif et associatif subsistent, tant pour l'addition que pour la multiplication. Pour l'addition ils sont vérifiés d'eux-mêmes ; pour la multiplication, ils s'expriment par les égalités :

$$ab = ba \qquad (1)$$

$$(ab)c = a(bc) \qquad (2)$$

Ces conditions conduisent à certaines relations entre les coefficients de formes linéaires E_{pq}. A tout système de coefficients de formes E_{pq} vérifiant ces relations, correspondra un ensemble de nombres complexes. — Les nombres complexes ordinaires (imaginaires) correspondent à :

$$e_1 = 1, \qquad e_2 = i. \qquad (n = 2)$$

Mais quand n est supérieur à 2, il existe des nombres différents de 0, dont le produit par certains autres nombres est nul. M W. appelle ces nombres des diviseurs de zéro. Malgré cette singularité, cette nouvelle algèbre est réductible à l'algèbre des nombres complexes de la forme : $\alpha + \beta i$. M W. a en effet établi que, si $\underline{a}$, $\underline{b}$ désignent 2 n-qcq. de l'ensemble, on peut les décomposer en un certain nombre de composants $a_1, a_2, \dots a_r$, $b_1, b_2 \dots b_r$ tels que :

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_r \qquad b = b_1 + b_2 + \dots + b_r$$



$$ab = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_r b_r$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_r}{b_r}$$

les composants a_i, b_i dépendant seulement d'une ou deux unités fondamentales.

Si l'on suppose seulement la loi associative exprimée par l'égalité (2), on a une algèbre beaucoup plus générale, qui est complètement déterminée par le système des expressions linéaires E_{pq}. Un exemple célèbre d'un système à 4 unités $e_1\, e_2\, e_3\, e_4$ est fourni par les quaternions d'Hamilton, où l'on a:

$$e_1 = 1, \quad e_2 = i, \quad e_3 = j, \quad e_4 = k$$

avec les relations:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$
$$ij = -ji = k$$
$$jk = -kj = i$$
$$ki = -ik = j$$

M. Poincaré a remarqué qu'à chaque système d'unités complexes correspond un groupe continu de substitutions linéaires à n variables, dont les coefficients sont des fonctions linéaires de n param. arbitraires. Un élève de M. Lie, M. Scheffer, a été ainsi conduit à partager les nombres complexes en 2 classes suivant que le groupe correspondant est intégrable ou non intégrable. A cette dernière classe appartient le groupe correspondant aux quaternions, et ceux-ci sont les représentants les plus simples de cette catégorie de nombres complexes.

[Importance des groupes infinis‡ (à un n infini de paramètres) pour les équations différentielles. La théorie des invariants différentiels s'étend aux groupes infinis. On entend par invariant différentiel relatif à $(m+p)$ lettres $x_1\, x_2 \dots x_m, z_1\, z_2 \dots z_p$, toute fonction des x, des z et des dérivées des z par rapport aux x, qui garde la même forme quand on effectue sur les x et les z les substitutions du groupe.]

‡ c. à d. où figure une fonction arbitraire (équivalant à un n infini de paramètres) ou même plusieurs fonctions arbitraires.

Cayley : Discours prononcé devant les membres de l'Association britannique, trad. par M. Raffy ds Bulletin des sciences mathématiques, 2e série, tome VIII, année 1884.

— Le lien de l'Arithmétique et de l'Algèbre avec la notion de temps est beaucoup moins visible, si même il existe, que celui de la Géométrie avec la notion d'espace.

Les idées mathématiques sont a priori (théorie platonicienne de la réminiscence.) Sir W.-R. Hamilton, ds sa 1e leçon d'Astronomie, dit que les mathématiques sont des sciences de pure raison – Les idées de nombre et de figure sont, selon lui, dérivées de l'idée d'ordre.

Discussion de l'empirisme mathématique de Stuart Mill. J'accorde que les vérités géométriques concernent des objets purement fictifs, qui n'existent pas et ne sont même pas possibles physiquement. Mais cela ne veut pas dire que nous ne puissions les concevoir, au contraire (1) ~~et cela n'ébranle pas l'exist. la math. au contraire~~. « J'ose dire que les objets purement fictifs sont les seuls réels, ὄντως ὄντα, que les objets matériels qui les rappellent ne sont auprès d'eux que des fantômes de la caverne de Platon, et que c'est grâce à eux seulement que nous sommes en mesure d'affirmer que leurs pareils n'existent pas dans la nature : si nous n'avions pas la notion de ligne droite, nous ne pourrions point affirmer qu'il n'existe aucune ligne parfaitement droite. »

(1) Les vérités géométriques ne sont vraies, et a fortiori nécessaires qu'en tant qu'elles concernent ces objets purement fictifs.

Mill : « Dans toutes les propositions sur les nombres est impliquée une condition sans laquelle aucune d'elles ne serait vraie, et cette condition est une hypothèse qui pourrait être fausse : c'est



la condition que 1 = 1, ou que tous les nombres sont formés des mêmes unités égales entre elles »

Supposons que l'espace réel ne soit qu'approximativement euclidien. Il en résultera non pas que les propositions de la Géométrie sont vraies approximativement, mais qu'elles restent vraies absolument par rapport à cet espace euclidien que nous regardions comme identique à l'espace réel.

Deux manières de concevoir les géométries non-euclidiennes : ou bien considérer ~~l'espace~~ notre espace à trois dimensions comme contenu dans un espace à quatre dimensions et le comparer à l'espace euclidien (plan) ~~comme~~ qui serait à ce dernier ce que le plan est à l'espace ordinaire ; ou bien modifier l'idée de distance ~~de telle~~ en imposant à l'unité de longueur une loi de variation telle que sa longueur dépende uniquement (et uniformément) de sa position et de sa direction. Cela revient à mesurer les distances par le temps que met à les parcourir un mobile dont la vitesse dépend uniquement de sa position et de sa direction (vulgò ; de la configuration du terrain.)

« Riemann semble avoir eu plutôt [en vue] de modifier l'idée de distance que de traiter l'espace réel comme un lieu situé dans l'espace à quatre dimensions. »

— « Une équation du second degré peut n'avoir aucune racine réelle : mais si l'on convient que l'équation : $x^2 + 1 = 0$ admet la racine i, elle admet aussi la racine $-i$, et l'on reconnaît aisément que toute équation du second degré à coefficients réels admet deux racines de la forme $a \pm bi$, a et b étant des quantités réelles » (qui peuvent être nulles). D'où le théorème : Une équation d'ordre n a toujours n racines (en général imaginaires, le réel étant un cas particulier de l'imaginaire.) L'Analyse est précisément la science des quantités imaginaires.

En formant l'équation du second degré qui donne les points communs à un cercle et à une droite, on trouve 2 racines réelles ou imaginaires : donc une droite et un cercle se coupent toujours en deux points, réels ou imaginaires. C'est ainsi que nous sommes conduits par l'Analyse à la notion géométrique de point imaginaire.

Les mêmes considérations s'étendent à la géométrie de l'espace et nous amènent à la conception d'un espace imaginaire, lieu de points et de figures imaginaires.

La notion d'imaginaire est impliquée et présupposée (sauf quand on spécifie précisément le contraire) dans toutes les conclusions de l'Analyse et de la Géométrie modernes.

Une fonction n'est réputée connue que si l'on donne sa valeur (généralement imaginaire et de la forme $X+iY$) pour toute valeur imaginaire $x+iy$ de la variable. (Argand) faux.

Représentation géométrique des imaginaires, due à Gauss (1831).

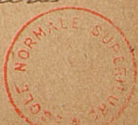
Correspondance multiforme : points de ramification (on peut distinguer les divers points correspondant à un seul, par la couleur).

On peut aussi représenter la correspondance d'une ~~fonction~~ variable $(x+iy)$ et d'une fonction $\varphi(x+iy) = X+iY$ par une courbe imaginaire du plan : $v = \varphi(u)$

où v et u prennent des valeurs en général imaginaires.

Espace à n dimensions pour représenter les variations simultanées de n variables. — L'espace doit toujours être considéré comme imaginaire, autrement les avantages de cette représentation ~~seraient~~ complètement perdus.

Coordonnées homogènes : dans l'espace à n dimensions un point est déterminé par les rapports de $n+1$ coordonnées. Cela revient, au point de vue analytique, à remplacer les variables primitives par des fractions de même dénominateur ; par suite, à la place des fonctions rationnelles et entières, mais non homogènes, des n variables primitives, s'introduisent des fonctions rationnelles et entières



et de plus homogènes, de $n+1$ variables ; c'est ce qu'on appelle des formes (quantics.)

En Perspective, pour déterminer la forme d'un objet, il faut deux projections (comme dans la Géom. descriptive de Monge.) Il est plus simple est d'employer deux perspectives faites sur le même plan, en plaçant l'œil en deux points de vue différents. Alors un point de l'espace est représenté sur le plan de projection par l'ensemble de deux points : ces points sont tels que la droite qui les joint passe par un point fixe du plan (la trace sur le plan de projection de la droite qui joint les deux points de vue.) Dans ce système une figure de l'espace est représentée dans le plan par deux figures telles que leurs points correspondants sont tous en ligne droite avec un point fixe..... Le géomètre italien Veronese a considéré deux figures de l'espace, telles que leurs points correspondants soient en ligne droite avec un point fixe, comme représentant une figure dans l'espace à quatre dimensions, et en a fait usage pour démontrer les propriétés de ces nouvelles figures.

— La notion de nombre dérive-t-elle de celle du temps ? Je ne le crois pas. Il me semble que nous avons la notion de pluralité indépendamment des idées de temps et d'espace et dans des circonstances où le temps n'intervient pas plus que l'espace.

La notion de nombre cardinal semble dériver de celle de nombre ordinal. Il serait possible avec la seule notion de pluralité (et d'ordre) de développer une science mathématique (théorie des arrangements.) En y introduisant l'idée de nombre, on a ce que Sylvester appelle tactique.

La notion de continuité est fondamentale dans le calcul des fluxions ; néanmoins, il me semble que les variations qu'on étudie en Math. sont pour la plupart considérées indépendamment du temps. Même dans la Cinématique, la notion du temps joue un rôle très-effacé.

Cayley, suite) En Cinématique, on ne considère que des mouvements fictifs, et si le système est regardé comme actuellement en mouvement, la vitesse du mouvement n'est pas spécifiée et n'intervient pas. Les lois des mouvements relatifs des divers points du système ne sont que des relations entre des grandeurs purement géométriques, savoir les éléments de trajectoire qui sont, ou pourraient être, parcourus simultanément par ces différents points.

La notion de temps s'introduit en Mécanique avec la notion de vitesse qui s'y rattache, la notion de force, la notion de matière (solide invariable, point matériel, fils et surfaces inextensibles, fluide parfait, incompressible, éther, etc.) enfin la notion de masse ou d'inertie.

Il est difficile de tracer une ligne de démarcation entre les domaines des Mathématiques et de la Physique.

Les incommensurables peuvent s'introduire dans la théorie des nombres sous la forme $a + b\sqrt{2}$, qu'on considère comme un nouveau nombre entier.

L'Almageste de Ptolémée (125 ap. J. C.) contient une Table d'arcs et de cordes (le problème : calculer l'arc en fonction de la corde remonte à Hipparque)

Les Arabes ont substitué à la corde le sinus. Le théorème de Ptolémée sur le produit des diagonales du quadrilatère inscrit donne ~~la co~~ le sinus de la somme de deux arcs.

Aux XVe et XVIe siècles, Purbach, Müller (Regiomontanus) Copernic, Reinhold, Maurolycus, Viète, etc. calculent des tables de fonctions circulaires.

Logarithmes inventés par John Napier de Merchiston (1551-1618.)

Logarithmes à base 10, par Henry Briggs, prof à Oxford († 1630)



6 L'Analyse relie les fonctions circulaires et logarithmiques par les imaginaires
Le P. Mersenne signale la roulette en 1615.
Kepler (1571–1630) Galilée (1564–1642) Newton (1643–1727)
Philosophiæ naturalis principia mathematica (1687)
Le problème des cordes vibrantes a conduit Lagrange à la représentation des fonctions par les séries trigonométriques
Théorie générale de l'attraction: polynômes de Legendre, fonctions de Laplace, Gauss, Lejeune Dirichlet, Green.
La projection stéréographique remonte à Ptolémée, la projection de Mercator a été inventée par Edward Wright vers 1600. Toutes deux sont orthomorphiques (cas partic. de la représentation géométrique d'une fonction analytique d'une variable imaginaire)
Monge a été conduit à la théorie de la courbure des surfaces par un problème de terrassements
La surface de l'onde lumineuse, découverte par Fresnel, est du 4e ordre; elle admet des plans tangents qui la touchent tout le long d'une circonférence.
Cayley s'excuse ici de l'insuffisance de ses connaissances tant en Mathématiques qu'en Physique.
« Il est difficile de donner une idée de la vaste étendue de la science mathématique actuelle. Le mot étendue ne dit pas assez. J'ai en vue une étendue diversifiée par de riches détails, non pas l'étendue monotone d'une plaine vide, mais un beau paysage à voir d'abord de loin, mais qu'on a plaisir ensuite à parcourir et à étudier dans chaque détail, montagne et vallée, fleuve, rochers, arbres et fleurs. Mais, comme toute autre beauté, la beauté d'une théorie mathématique se sent, elle ne se démontre pas. »
Le principe de dualité en géométrie est dû à Plücker (1839)
(Faux. Le mémoire de Chasles sur les principes d'homographie et de dualité est antérieur: adressé à l'Académie des Sciences de Bruxelles en déc. 1829, il a été imprimé en 1837.)

Le genre d'une courbe d'ordre n est égal à l'excès du nombre maximum $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ de points doubles que peut avoir une courbe de cet ordre, sur le nombre des points doubles que présente la courbe considérée (les points de rebroussement étant comptés comme points doubles). Cette notion a été introduite par Riemann (1857). La famille se compose des courbes du même genre. — Riemann a étudié la transformation générale d'une courbe plane (en remplaçant les 3 coord. homog. par 3 formes de même degré par rapport à 3 nouvelles coord.). Le genre de la transformée reste le même que celui de la proposée.

La notion de congruence apparaît chez Gauss (1801). Racines de l'éq. binôme: $x^n - 1 = 0$. i est racine de l'éq. pour $n = 4$. Théorie générale des nombres complexes: $a + b\rho$, où ρ est une racine cubique imaginaire de l'unité (rac. de l'éq.: $x^3 - 1 = 0$.) (Eisenstein, Kummer.) Les nombres premiers complexes ont des propriétés analogues aux nombres premiers entiers.

Cf. Dedekind sur la théorie des nombres entiers algébriques (Bulletin, 1e série, t. XI; 2e série, t. II)

Imaginaires de congruence inventés par Galois: n imaginaires qui vérifient une congruence sans solutions réelles, par ex:

$x^2 - 2 \equiv 0 \pmod{5}$ a pour solution $\pm i$; on aura le système des nombres complexes: $a + bi \pmod{5}$ c.à.d. les 5^2 nombres obtenus en faisant $\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} = 0, 1, 2, 3, 4.$

Aux formes quadratiques à 4 ou plusieurs variables se rattache la décomposition d'un nombre entier en 4 ou plusieurs carrés.

— Un sujet qui semble isolé dans la théorie des nombres, c'est le théorème de Fermat sur l'impossibilité de la relation:

$x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ pour $\lambda > 3$.



Dans le Algèbre associative linéaire Benjamin Peirce considère des symboles A, B, ... qui sont des fonctions linéaires d'un certain nombre de lettres ou unités $i, j, k, l, \ldots$ ayant pour coefficients des expressions algébriques réelles ou imaginaires. Les produits de deux quelconques des lettres $i, j, k, \ldots$ sont eux-mêmes des fonctions linéaires de ces lettres ; ils sont associatifs mais non commutatifs : ainsi $ij \gtrless ji$; mais : $ij.k = i.jk$. Il n'y a qu'un seul produit pour 3 ou plusieurs lettres quel que soit leur ordre.

Ces symboles peuvent représenter l'addition et la multiplication des segments, des aires, des forces, et des autres grandeurs géométriques cinématiques ou mécaniques. Chacune de ces grandeurs étant définie par des paramètres $a, b, c, \ldots$ on représente cette grandeur par la fonction linéaire $ai + bj + ck + \ldots$, et de même la somme et le produit (dans un ordre déterminé) de deux grandeurs de même espèce, qui seront des grandeurs de même espèce, représentés par des fonctions linéaires de même forme à leur tour. Chaque espèce de grandeur sera définie par les lois des combinaisons des unités $i, j, \ldots$ qu'on devra établir de telle manière que les sommes et produits de ces grandeurs aient une signification géométrique cinématique ou mécanique.

9



10

Mathematica.

~~Cours de M. Poincaré.~~

Duhem

a

~~Cours de M. Poincaré.~~



Bibliographie mathématique

Clausius : De la fonction potentielle et du potentiel
trad. Folie Gauthier-Villars, 1870.

Chasles : Rapport sur les progrès de la géométrie. I. N. 1870.

Plücker : Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. — Teubner, 1869.

Jordan : Traité des substitutions et des équations algébriques
Gauthier-Villars, 1870.

Hoüel : Théorie élémentaire des quantités complexes

Baltzer. Théorie et ~~application~~ des déterminants. (Leipzig, 1870)
trad. Hoüel Paris, 1861.

Riemann. Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen. Braunschweig ; Vieweg. 1869.

Hesse die Determinanten elementar behandelt. Leipzig, 1871.

Hattendorf : Einleitung in die ~~Theorie der~~ Lehre von den Determinanten
Hannover 1872.

Dostor : Éléments de la théorie des déterminants. Paris, 1877.

Chasles : Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie. 1837.

id. Traité de Géométrie supérieure 1852.
Traité des Sections coniques. 1865.

Steiner : Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Berlin, 1832

Von Staudt : Geometrie der Lage Nürnberg 1847.
Beiträge zur Geom. d. L. ibid 1857.



2

Poncelet: Traité des propriétés projectives des figures Paris, 1822

Fiedler: Darstellende Geometrie Leipzig, 1875.

Neumann: Theorie der Abelschen Integrale Leipzig, 1863.

Möbius: der barycentrische Calcül. Leipzig, 1827.

Carnot: Géométrie de position. (an XI, 1803.)

id. Traité de la Corrélation des figures de Géométrie

Kant : Ueber die negativen Grössen ~~d~~ in die Weltweisheit 1763.

Harriot : Algèbre — 1631. [1560–1621]

Whewell : Philosophie des Sciences inductives. 1840.

Sir W. R. Hamilton : Theory of conjugate Functions, or algebrical Couples (imaginaires)
with ... Essay on Algebra as the Science of pure Time
1833–35 (Trans R. I. Acad t. XVII.)

Monge : Mémoire sur les déblais et remblais (Acad. des Sc. 1781.)

Newton : Philosophiæ naturalis principia mathematica (1687)
Enumération des courbes du troisième ordre.

Plücker : Théorie des courbes algébriques (Bonn, 1839.)

Weierstrass : Mémoire sur les fonctions holomorphes (Acad Berlin, 1876)
~~trad~~ par M. Picard ds les Ann. de l'Ec. Norm Sup. 1879.

Legendre : Exercices de calcul intégral (1811–1816)
Théorie des fonctions elliptiques (1825–1828)

Jacobi : Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum (1829)

~~Abel : Considérations~~

Abel : Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes (1826.) (Crelle IX, 1832)

Jacobi : Considerationes generales de transcendentibus Abelianis

Riemann : Mémoire sur la théorie des fonctions abéliennes (Crelle, t. LIV, 1857.)
(genre d'une courbe)

Gœpel : Theoria transcendentium Abelian. primi ordinis (Crelle, t. 35, 1847.)

Rosenhain : Mém. sur les fonctions de 2 variables, etc (1846) Paris, 1851
(Mém. des sav. étrangers, t. XI.)

C'est Gauss, vers 1831, qui a eu l'idée de représenter un nombre complexe $x+iy$ par un point du plan xy. (Cayley.) [faux cf. Stolz



Lagrange: Traité des équations numériques (1798.)
Gauss: Disquisitiones arithmeticæ (1801.)
Legendre: Théorie des nombres (1798.)
Abel (1826–29.)
Galois (1811–1832.)
Jordan: Traité des substitutions et des éq. algébriques (1870.)

Sir W. R. Hamilton: Théorie des quaternions.
Peirce: Algèbre associative linéaire (1870.)
Algebra of Logic (American Journal of Math. t. III.)
Boole: Laws of thought (1854.)
On Propositions numerically definite.
Schubert: Abzählende Geometrie.
Grassmann: Ausdehnungs-lehre. (1844, 1862.)
id. Lehrbuch der Arithmetik (1861.)
id. die Formenlehre (1872.)
Schrœder: Lehrbuch der Arithmetik und Algebra Leipzig (1873.)
Dirichlet: Vorlesungen über Zahlentheorie, ed. Dedekind
Kossak: die Elemente der Arithmetik d'apr. (1872.) Weierstrass.
Baltzer: Elemente der Mathematik
Vieille: Théorie générale des approximations numériques 2e éd (1854)
Radounet: Eléments de calcul approximatif 3e éd (1880.)
Stern: Algebraische Analysis (1860.)

P. du Bois-Reymond: Unendlich der Functionen

Cantor: Vorlesungen über Geschichte der Math. (Leipzig, 1880.)

Hankel: Zur Geschichte der Mathematik (1874.)
id — Vorlesungen über complexe Zahlen
Hauber: Scholae logico-mathematicae (1825.)

Bolzano: die drei Probleme (der Rectification, der Complanation und der Cubirung, ohne Betrachtung des unendlich Kleinen... Leipzig (1817.)

Pincherle: Saggio di una introduzione alla theoria delle funzioni analitiche secondo i principii del Prof. Weierstrass. — ap. Battaglini Giornale, XVIII.

(l'abbé Bonaventure) Berloty: Théorie des quantités complexes à n unités principales (Thèse, Paris, 1886.)

Weierstrass } Dedekind } Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen, ap. Göttinger Nachrichten 1884, 1885.

Hankel: Theorie der complexen Zahlensysteme, 1867.

Argand: Essai sur une manière de représenter les imaginaires, 2e éd. par Houel: Paris, 1874. (cf. Ann. de Gergonne tome V.)

Houel: Sur la méthode d'analyse géométrique de Bellavitis, ap. Nouv. Annales de Math. 2e série, tome 8 (1869.)

Laisant a traduit la Sposizione del metodo delle equipollenze de Bellavitis (1854) ap. N. Ann. de math. 2e série, t. 12 et 13.

H. Scheffler: Ueber das Verhältniss der Arithmetik zur Geometrie Braunschweig 1846.

F. Riecke: die Rechnung mit Richtungszahlen. Stuttgart, 1856.

Witzschel: Grundlinien der neueren Geometrie (Mœbius) 1858.

Thomae: Elemente der Theorie der analytischen Functionen.

Sur les produits infinis, v. Mittag-Leffler, Acta mathematica t. IV.



6

Weierstrass: Ueber Functionen einer reellen Veränderlichen
mém. trad. dans le Journal de M. Jordan, t. II, p. 105.

Kronecker: de unitatibus complexis (dissertatio inauguralis) (1845)
arithmetica) ap. Journal de Crelle, t. 93 (1882)

Lüroth: das Imaginäre in der Geometrie und ~~die~~ der Rech~~nung~~nen mit
Würfen, ap. Mathematische Annalen, t. VIII et XI.

Klein: Darstellung der Imaginäre in der Geometrie,
ap. Gœttinger Nachrichten, 1872.

Clebsch: sur l'Involution cyclique. Journal de Borchardt, t. 68.

Maximilien Marie, ap. Journal de Liouville:
Essai de représentation des imaginaires de la Géom. analytique

Jonquières: sur l'Involution, ap. Annali di Matematica, t. II (1859)

Reye: Geometrie der Lage. 2e éd. Hanovre, 1877-80.

Thomæ: Ebene geom. Gebilde 1. und 2. Ordnung vom Standpunkte
der Geometrie der Lage. Halle, 1873.

Sur le théorème fondamental de la Géométrie projective, voir:
Darboux, ap. Mathematische Annalen, t. XVII.

Siebeck: Ueber graphische Darstellung imaginärer Functionen. Crelle, t. 55.

7

Thèse de l'abbé Bonaventure Berloty :
Théorie des ~~unités~~ quantités complexes à n unités principales
(26 mars 1886.)

Je Houel : Cours de calcul infinitésimal (1878)
[Cf Hankel, Vorlesungen über complexe Zahlen.
Chap. I de l'Introduction :
Consid. gén. – Notions sur le calcul des opérations.
Chap II : Généralisation successive de l'idée de quantité.
Détermin. par les th. fondam. de la th. des éq. alg



8

Carnot : Géométrie de position (an XI) 1803.
Ds la Dissertation préliminaire Carnot
discute la « réalité » des nombres négatifs.

Soit : $S_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots\dots \qquad n > 1.$

S_{2n} est transcendante. En effet, on a :

$$B_n = \frac{2n!}{2^{2n-1}\pi^{2n}} S_{2n} \qquad S_{2n} = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{1.2.3\dots.2n} B_n$$

Or B_n (nombre de Bernoulli) est rationnel ; donc S_{2n} est irrationnelle comme π^{2n}, et même transcendante, puisque toute puissance de π est transcendante.

$$S_2 = \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\dots \qquad \left(B_2 = \frac{1}{6}.\right)$$

Formule de Leibniz :

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots\dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots$$

tirée du développement en série :

$$\text{arctg}\, x = \frac{i}{2} \log \frac{1-xi}{1+xi} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Autre formule : $\pi = 6\, \text{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{12}\left[1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \dots\right]$

On peut partager $\frac{\pi}{4}$ en 2 arcs liés par la relation :

$$1 = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\,\alpha\, \text{tg}\,\beta}$$

Par ex : $\frac{\pi}{4} = \text{arctg}\frac{1}{2} + \text{arctg}\frac{1}{3} = \text{arctg}\frac{1}{2} + \text{arctg}\frac{1}{5} + \text{arctg}\frac{1}{8}$

formule employée par Dahse pour calculer 205 chiffres de π.

Lehmann en a calculé 261 avec la formule :

$$\frac{\pi}{4} = 2\,\text{arctg}\frac{1}{3} + \text{arctg}\frac{1}{7}$$ (Grunert's Archiv, t XXI p. 121.)

(cf. J. Tannery, Intr. à l'ét. des f. d'une var. p. 352.)



10

De: $\sin x = x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\cdots\cdots$

on tire la formule de Wallis: $\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$

Nombres d'Euler : $E_1 = 1 \quad E_2 = 5 \quad E_3 = 61 \quad E_4 = 1385$

$E_5 = 50521 \quad \ldots\ldots$

$$\sec x = 1 + \sum_1^\infty {}^k \frac{E_k x^{2k}}{2k!} \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

Les nombres d'Euler sont entiers positifs et croissent constamment.

Coefficients tangentiels : $T_1 = 1,\ T_2 = 2,\ T_3 = 16,\ T_4 = 272$

$T_5 = 7936 \quad \ldots\ldots$

$$\operatorname{tang} x = \sum_1^\infty {}^k \frac{T_k}{(2k-1)!} x^{2k-1} \qquad T_k = \frac{1}{k} 2^{2k-1}(2k-1) B_k$$

(B_k = nombre de Bernoulli)



Force électromotrice :	E.	Volt.	$E = \Sigma IR.$
Intensité :	I.	Ampère	$I = \frac{E}{R+r}$
Résistance :	R.	Ohm	$R = \frac{\rho l}{s}$ longueur section.
Quantité d'électricité		Coulomb	
Capacité électrique		Farad	

L'ampère est l'intensité d'un courant d'~~intensité~~ force électromotrice égale à 1 volt dans un circuit de résistance égale à 1 ohm.

Le coulomb est la quantité d'électricité fournie en 1 seconde par un courant d'intensité égale à 1 ampère.

Le farad est la capacité d'un conducteur qui, chargé d'une quantité d'électricité égale à 1 coulomb, donne une force électromotrice de 1 volt.

L'ampère-heure vaut 3600 coulombs (ampères-seconde)

Le watt est le produit du volt et de l'ampère. Il mesure la puissance d'un courant (produit de sa pression par son intensité.)

Le joule ou watt-seconde mesure l'énergie électrique ou travail.

Le watt-heure vaut 3600 joules. Hectowatt-heure, kilowatt-heure.

Le kilogrammètre vaut 9,81 watts.

Le cheval-vapeur (75 kilogrammètres par seconde) vaut 736 watts-seconde ; le cheval-heure vaut 736 watts-heure (735,75.)



J. Bertrand : Thermodynamique

Lois de Mariotte et de Gay-Lussac : $pv = RT$ (pour 1 kilo)

T température absolue $= 273° + \tau$ τ température centigrade

C calorique spécifique à pression constante ; $\frac{C}{c} = 1,4$ environ.
c ——— à volume constant.

Lignes isothermes : $pv = C^{te}$. (hyperboles) $dQ = Cdt_1 + cdt_2$

$$dQ = \frac{C}{R} p dv + \frac{c}{R} v dp$$ C et c ne sont pas constants.

$$dt = \frac{pdv + vdp}{R}$$ donc $dQ = cdt + \frac{C-c}{R} pdv$

$$= Cdt - \frac{C-c}{R} vdp$$

$dQ = cdt + \frac{C-c}{R} pdv$:

cdt est la quantité de chaleur qui échauffe le gaz à volume constant.
$\frac{C-c}{R} pdv$ ~~représente~~ est proportionnel au travail extérieur produit par la variation de volume du gaz : car pdv est le produit de la force par le chemin parcouru.

Quantité de chaleur absorbée par 1 kil. de gaz pendant un cycle :

$$Q = \frac{C-c}{R} \int pdv \qquad \text{car } C\int dt = 0$$

la température initiale et la température finale étant égales.
$\int pdv$ est le travail effectué par le gaz ; et l'aire du cycle en coord p, v.

Energie totale d'un gaz : $\int pdv = RT \int \frac{dv}{v} = RT(\log v_1 - \log v_0)$

Le travail que peut produire un gaz dont la température est constante, est infini (il correspond à une dilatation infinie)

Faisons : $dQ = cdt + \frac{C-c}{R} pdv = 0$

Intégrons : $c(T_1 - T_0) + \frac{C-c}{R} \int pdv = 0$

d'où : $\int pdv = \frac{cR}{C-c}(T_0 - T_1)$ Si $T_1 = 0$;

Le travail que peut produire un gaz par la détente adiabatique est proport à la température absolue.



Lignes adiabatiques: $v\,dp + C p\,dv = 0$ $\quad c\frac{dp}{p} + C\frac{dv}{v} = 0$

$c \log p + C \log v = C^{te}$ $\quad (p^c v^C = C^{te})$

$\frac{dQ}{T} = c\frac{dp}{p} + C\frac{dv}{v}$ différentielle de $c\log p + C\log v$.

$\int\frac{dQ}{T}$ pris le long d'un cycle fermé, est nulle (p et v reprenant les mêmes valeurs)

Pour un cycle de Carnot, $\int\frac{dQ}{T}$ est nulle (avec dQ) le long des lignes adiabatiques; le long des lignes isothermes on trouve

$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0$ donc: $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$

Q_1 quantité de chaleur versée par la source de température T_1;
Q_2 ——— recueillie ——— T_2.

Comme $dt = 0$, on a sur les lignes isothermes $dQ = \frac{C-c}{R} p\,dv$

$p = \frac{RT}{v}$ donc $dQ = (C-c)\,T\,\frac{dv}{v}$

$Q_1 = (C-c)\,T_1 \log\frac{v_2}{v_1}$ $\quad Q_2 = (C-c)\,T_2 \log\frac{v_3}{v_4}$

Les lignes M_2M_3, M_4M_1 étant adiabatiques, $\frac{v_1}{v_2} = \frac{v_4}{v_3}$.

donc: $Q_1 - Q_2 = (C-c)(T_1 - T_2)\log\frac{v_2}{v_1}$.

Le travail effectué par le gaz est donc: $R(T_1 - T_2)\log\frac{v_2}{v_1}$;

Son rapport à Q_1 est: $\frac{R}{C-c} \cdot \frac{T_1 - T_2}{T_1}$

proportionnel à la différence de température des 2 sources.

Le cycle de Carnot (entre 2 températures données) fournit le rendement maximum (le rendement étant le rapport du travail produit à la chaleur dépensée Q_1.)

– Carnot admettait que sur un cycle de C. on a: $\int dQ = 0$, tandis qu'on a au contraire: $Q_1 - Q_2 \gtrless 0$.

Mayer : La différence des deux chaleurs spécifiques est égale au travail produit par la dilatation : $(C-c)\,dt = A\,p\,dv$

A équivalent calorifique du travail $= \frac{1}{E}$ (E équivalent mécanique de la chaleur.)

Or : $RT = pv$, $\frac{dt}{dv} = \frac{p}{R}$ Donc $A = \frac{C-c}{R} = \frac{1}{367}$, pour Mayer — Pour Joule : $E = 422, 429$, etc.

Théorème de Mayer : $dQ - A\,p\,dv$ est une différentielle totale c.à.d : $\int(dQ - A\,p\,dv)$ est une fonction de p et de v.

$$dU = dQ - A\,p\,dv$$

Pour les gaz : $dQ = c\,dt + A\,p\,dv$ $\quad dU = c\,dt \quad U = cT$.

Pour les liquides dv négligeable : $dU = dQ = C\,dt \quad U = CT$

Pour un liquide et sa vapeur : p pression d'évaporation (const.) r chaleur d'évaporation ; la température du tout reste constante.

$$dU = r\,dm - A\,p\,dv \qquad U = rm - Ap(v - v_0) + U_0$$

m poids vaporisé. Soit σ le vol. de 1 kil de vapeur, s celui de 1 kil de liquide

$$U = rm + CT - A\,p\,m(\sigma - s) \qquad CT = U_0 \text{ énergie du liquide}$$

La fonction U doit être ~~[illegible]~~ indépendante de la température T.

Théorème de Carnot. C. croyait que toute la chaleur versée par la source chaude était recueillie par la source froide ; tandis que la différence de ces quantités de chaleur est prop. au travail produit G :

$$Q_1 - Q_2 = AG$$

Rendement : $\frac{AG}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$

Théorème de Clausius : $\int \frac{dQ}{T} = 0$ pour un cycle fermé quelconque d'où l'on conclut, pour un cycle de Carnot :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{ou} \quad \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$



$\frac{dQ}{T}$ est une différentielle exacte : dS : $\int \frac{dQ}{T} = S$ (entropie)

Entropie d'un gaz : $dQ = c\,dt + Ap\,dv$

$$\frac{dQ}{T} = \frac{c\,dt}{T} + AR\frac{dv}{v} \qquad S = c \log\frac{T}{T_0} + AR \log\frac{v}{v_0} + S_0$$

Entropie d'un liquide : $dQ = C\,dt$ $\qquad S = C\log\frac{T}{T_0} + S_0$

Entropie d'un liquide partiellement vaporisé : $dQ = r\,dm$

$S = \frac{rm}{T}$ $\qquad$ (r et T étant constants)

Entropie totale du liquide et de la vapeur : $S = C\log\frac{T}{T_0} + \frac{rm}{T} + S_0$

Si tout le liquide est réduit en vapeur saturée : $S = C\log\frac{T}{T_0} + \frac{r}{T} + S_0$
$(m=1)$

A partir de ce moment, la vapeur se comporte comme un gaz : son entropie devient : $S = C\log\frac{T}{T_0} + \frac{r}{T} + c\log\frac{T'}{T} + AR\log\frac{v'}{v} + S_0$

<u>Equations différentielles.</u> $\qquad dQ = c\frac{\partial t}{\partial p}dp + C\frac{\partial t}{\partial v}dv$

Les théorèmes de Mayer et de Clausius disent que les expressions :

$$c\frac{\partial t}{\partial p}dp + C\frac{\partial t}{\partial v}dv - Ap\,dv \qquad \frac{c}{T}\frac{\partial t}{\partial p}dp + \frac{C}{T}\frac{\partial t}{\partial v}dv$$

doivent être intégrables. Conditions :

$$\frac{d}{dp}\left(C\frac{\partial t}{\partial v} - Ap\right) = \frac{d}{dv}\left(c\frac{\partial t}{\partial p}\right) \qquad \frac{d}{dp}\left(\frac{C}{T}\frac{\partial t}{\partial v}\right) = \frac{d}{dv}\left(\frac{c}{T}\frac{\partial t}{\partial p}\right)$$

$$(C-c)\frac{d^2t}{dp\,dv} + \frac{dC}{dp}\frac{dt}{dv} - \frac{dc}{dv}\frac{dt}{dp} = A$$

$$(C-c)\frac{d^2t}{dp\,dv} + \frac{dC}{dp}\frac{dt}{dv} - \frac{dc}{dv}\frac{dt}{dp} = \frac{C-c}{T}\frac{dt}{dp}\frac{dt}{dv}$$

D'où : $\qquad A = \frac{C-c}{T}\frac{dt}{dp}\cdot\frac{dt}{dv} \qquad AT = (C-c)\frac{dt}{dp}\cdot\frac{dt}{dv}$.

Si température constante :

$dt = \frac{dt}{dp}dp + \frac{dt}{dv}dv = 0$ $\qquad$ on a : $dQ = (C-c)\frac{dt}{dv}dv = AT\frac{dp}{dt}dv$

Variables t et v : $dQ = c\,dt + (C-c)\frac{dt}{dv}dv = c\,dt + l\,dv$

Théorèmes de M et de Cl : $dQ - Ap\,dv = c\,dt + (l - Ap)\,dv$

$$\frac{dQ}{T} = c\frac{dt}{T} + l\frac{dv}{T}$$

Sont intégrables. Conditions : $\frac{dc}{dv} = \frac{dl}{dt} - A\frac{dp}{dt}$

$$\frac{1}{T}\frac{dc}{dv} = \frac{1}{T}\frac{dl}{dt} - \frac{l}{T^2} \qquad \frac{dc}{dv} = \frac{dl}{dt} - \frac{l}{T}$$

D'où : $l = AT\frac{dp}{dt} = (C-c)\frac{dt}{dv}$ résultat prévu $\frac{dc}{dv} = AT\frac{d^2p}{dt^2}$

Variables t et p : $dQ = C\,dt + g\,dp$

$dQ - Ap\,dv = C\,dt + g\,dp - Ap\,dv \qquad \frac{dQ}{T} = C\frac{dt}{T} + g\frac{dp}{T}$

Sont intégrables. Ajoutons à la 1re $Ap\,dv + Av\,dp$ diff. totale

$C\,dt + g\,dp + Av\,dp$ Conditions d'intégrabilité :

$$\frac{dC}{dp} = \frac{dg}{dt} + A\frac{dv}{dt} \qquad \frac{dC}{dp} = \frac{dg}{dt} - \frac{g}{T} \qquad A\frac{dv}{dt} = -\frac{g}{T}$$

$$g = -AT\frac{dv}{dt} = -(C-c)\frac{dt}{dp} \qquad \frac{dC}{dp} = -AT\frac{d^2v}{dt^2}$$

Théorème de Clapeyron : Liquide se vaporisant en vase clos à tempér. const : $dQ = AT\frac{dp}{dt}dv$ Or : $dQ = r\,dx$ (dv volume variable)

r calorique d'évaporation, dx poids de liquide vaporisé.

Or $\frac{dx}{dv} = \frac{1}{\sigma - s}$ σ vol. de 1k de vapeur, s vol de 1k de liquide

Donc : $r = AT\frac{dp}{dt}(\sigma - s)$

Pour le même liquide, l'équation : $\frac{dc}{dv} = AT\frac{d^2p}{dt^2}$ a son second membre indépendant de v (p indép. de v) donc en intégrant : $c = ATv\frac{d^2p}{dt^2} + F(T)$

c est la calorique spécifique du mélange de vapeur et de liquide. Si $v = s$, c est la calorique spécifique du liquide k :



Donc $k = AT s \frac{d^2p}{dt^2} + F(T)$ $\quad c - k = AT(v-s)\frac{d^2p}{dt^2}$

$$dQ = c\,dt + AT\frac{dp}{dt}dv = k\,dt + AT(v-s)\frac{d^2p}{dt^2}dt + AT\frac{dp}{dt}dv$$

$$dU = k\,dt + AT(v-s)\frac{d^2p}{dt^2}dt + AT\frac{dp}{dt}dv - Ap\,dv,$$

$$dS = k\frac{dt}{T} + A(v-s)\frac{d^2p}{dt^2}dt + A\frac{dp}{dt}dv$$

Intégrons.

$$U = kT + AT(v-s)\frac{dp}{dt} - Ap(v-s)$$

$$S = k\log T + A(v-s)\frac{dp}{dt}$$

Or on a obtenu (p. 3 & 4):

$$U = mr + CT - Apm(\sigma - s) \qquad S = C\log T + \frac{mr}{T}.$$

Or: $m(\sigma - s) = v - s$. $\quad r = AT(\sigma - s)\frac{dp}{dt}$

De la comparaison des formules on tire les formules déjà trouvées (th. de Clap..)

Problème. Quantité de chaleur nécessaire pour porter, en vase clos, 1^k de liquide et vapeur de T_0 à T. Calorique spécifique à vol. const.

$$c = k + AT(v-s)\frac{d^2p}{dt^2} \qquad x = \int_{T_0}^{T} c\,dt = \int_{T_0}^{T} k\,dT + \int_{T_0}^{T} AT\frac{d^2p}{dt^2}(v-s)\,dT$$

$$\int AT\frac{d^2p}{dt^2}(v-s)\,dT = A(v-s)\left(T\frac{dp}{dt} - p\right)$$

$$x = k(T - T_0) + A(v-s)\left[T\frac{dp}{dt} - p - T_0\frac{dp_0}{dt} + p_0\right]$$

— Les deux fonctions U et S ne sont pas indépendantes : si l'on prend t et v pour variables: $dQ = c\,dt + AT\frac{dp}{dt}dv$

$$dU = c\,dt + A\left(T\frac{dp}{dt} - p\right)dv \quad , \quad dS = \frac{c\,dt}{T} + A\frac{dp}{dt}dv$$

$\frac{\partial U}{\partial t} = c, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{c}{T}$ Donc $\frac{\partial U}{\partial t} = T\frac{\partial S}{\partial t}$.

Fonction caractéristique de M Massieu $\quad H = ST - U \quad (v, t)$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = S + T\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t} = S \qquad U = ST - H = T\frac{\partial H}{\partial t} - H$$

Ainsi de cette fonction absolument arbitraire se déduisent S et U.

$$\frac{\partial H}{\partial v} = T\frac{\partial S}{\partial v} - \frac{\partial U}{\partial v} \qquad \text{Or: } \frac{\partial S}{\partial v} = A\frac{dp}{dt}, \quad \frac{\partial U}{\partial v} = AT\frac{dp}{dt} - Ap$$

$$\frac{\partial H}{\partial v} = Ap. \qquad c = \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{d}{dt}\left(T\frac{\partial H}{\partial t} - H\right) = T\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}.$$

$$(C-c)\frac{dt}{dp}\frac{dt}{dv} = AT \qquad \text{Or: } \frac{dt}{dv} = -\frac{\frac{dp}{dv}}{\frac{dp}{dt}} \qquad \frac{dt}{dp} = \frac{1}{\frac{dp}{dt}}$$

$$C - c = -\frac{AT\left(\frac{dp}{dt}\right)^2}{\frac{dp}{dv}} = -T\frac{\left(\frac{\partial^2 H}{\partial t\,\partial v}\right)^2}{\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}}$$

Variables t et p. Autre fonction : $H' = ST - U - Apv$

$$dH' = TdS + SdT - dU - Apdv - Avdp$$

$$TdS = dQ, \quad dU = dQ - Apdv, \qquad \text{donc:}$$

$$dH' = Sdt - Avdp \qquad \frac{\partial H'}{\partial t} = S, \quad \frac{\partial H'}{\partial p} = -Av.$$

$$U = ST - Apv - H' = T\frac{\partial H'}{\partial t} + p\frac{\partial H'}{\partial p} - H'$$

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{C}{T}dt - A\frac{dv}{dt}dp \qquad C = T\frac{\partial S}{\partial t} = T\frac{\partial^2 H'}{\partial t^2}$$

$$(C-c)\frac{dt}{dp}\frac{dt}{dv} = AT \qquad \frac{dt}{dp} = -\frac{\frac{dv}{dp}}{\frac{dv}{dt}} \qquad \frac{dt}{dv} = \frac{1}{\frac{dv}{dt}}$$

$$C - c = -AT\frac{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}{\frac{dv}{dp}} = T\frac{\left(\frac{\partial^2 H'}{\partial p\,\partial t}\right)^2}{\frac{\partial^2 H'}{\partial p^2}}$$

Gaz parfaits.

$$dU = cdt + (C-c)\frac{dt}{dv}dv - Apdv = cdt \qquad \text{car: } \frac{C-c}{R} = A, \quad pv = RT.$$

$$U = cT \qquad dS = \frac{cdt}{T} + AR\frac{dv}{v} \qquad S = c\log T + AR\log v$$

$$H = ST - U = cT\log T + ART\log v - cT$$

$$Ap = \frac{\partial H}{\partial v} = \frac{ART}{v} \qquad p = \frac{RT}{v} \quad \text{(qu'on retrouve).}$$

$$c = T\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = c \ \text{(identité)} \qquad C - c = -T\frac{\left(\frac{\partial^2 H}{\partial v\,\partial t}\right)^2}{\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}} = AR \ \text{(comme}$$



Vapeur saturée. La pression étant ~~liée à~~ fonction de la température, H n'existe pas

$$\frac{dc}{dv} = AT\frac{d^2p}{dt^2} \qquad c = ATv\frac{d^2p}{dt^2} + F(t)$$

Supposons $v = s$ (tout liquide): $k = ATs\frac{d^2p}{dt^2} + F(t)$

k calorique spécifique du liquide; donc:

$$c = k + (v-s)AT\frac{d^2p}{dt^2}.$$

$$dU = c\,dt + AT\frac{dp}{dt}dv - Ap\,dv \qquad dS = c\frac{dt}{T} + A\frac{dp}{dt}dv$$

$$dU = k\,dt + AT\frac{d^2p}{dt^2}(v-s)\,dt + AT\frac{dp}{dt}dv - Ap\,dv$$

$$dS = k\frac{dt}{T} + A(v-s)\frac{d^2p}{dt^2}dt + A\frac{dp}{dt}dv$$

Intégrons:

$$U = kT + AT(v-s)\frac{dp}{dt} - Ap(v-s)$$

$$S = k\log T + A(v-s)\frac{dp}{dt}$$

(cf. p. 6)

$$H = ST - U = kT\log T + Ap(v-s) - kT$$

$$Ap = \frac{\partial H}{\partial v} = Ap \qquad c = T\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = AT(v-s)\frac{d^2p}{dt^2} + k \quad \text{(donnée)}$$

$$C - c = -T\frac{\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial t}\right)^2}{\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}} = \infty.$$

~~Car C est infini,~~ le calorique spécifique à pression constante est infini, puisque la pression dép. de la tempér.

Poincaré, Thermodynamique :

Dans tout cycle fermé, on a :

$$S_1 - S_0 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dQ}{T} \leq 0$$

Pour un cycle irréversible : $\int \frac{dQ}{T} < 0$

Pour un cycle réversible : $\int \frac{dQ}{T} = 0$

L'entropie d'un système isolé va toujours en augmentant :

$$S_1 - S_0 > 0$$

Pour qu'une transformation soit possible il faut que :

$$dQ \leq T\,dS$$

Pour qu'une transformation soit réversible il faut que :

$$dQ = T\,dS$$



10




ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

